УДК: 517.927.4
DOI 10.51691/2541-8327_2022_4_1

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Звягинцев А.И.
доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук,
Михайловская военная артиллерийская академия,
Санкт-Петербург, Россия
Малиновский В.С.
доктор технических наук, профессор,
Михайловская военная артиллерийская академия,
Санкт-Петербург, Россия
Белоцерковский П.П.
старший преподаватель,
Михайловская военная артиллерийская академия,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация
В статье рассматривается математическая модель, позволяющая оценивать вероятностные характеристики возможных аварийных ситуаций для сложных технических систем. Модель содержит нелинейное сингулярное дифференциальное уравнение второго порядка и краевые условия. Для данной краевой задачи доказана теорема существования решения и исследовано поведение графика решения. Приближенными методами получены численные решения рассматриваемой модели. Полученные результаты могут применяться в теории надежности сложных технических систем.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейное дифференциальное уравнение, краевая задача, моделирование решений краевой задачи.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS TO A SINGULAR BOUNDARY PROBLEM

Zvyagintsev A.I.
Doctor of Economics, PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Mikhailovskaya Artillery Military Academy,
Saint Petersburg, Russia
Malinovsky V.S.
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Mikhailovskaya Artillery Military Academy,
Saint Petersburg, Russia
Belotserkovsky P.P.
Senior Lecturer,
Mikhailovskaya Artillery Military Academy,
Saint Petersburg, Russia

Abstract.
The mathematical model that allows one to assess the probabilistic characteristics of possible emergency situations for complex technical systems is considered in this paper. The model contains a second order nonlinear singular differential equation and boundary conditions. For this boundary value problem, the solution existence theorem is proved, and solution behavior graph is investigated. Numerical solutions of the considered model are obtained by using approximate methods. The results obtained can be applied in the reliability theory.
Keywords: mathematical model, nonlinear differential equation, boundary value problem, modeling of the boundary value problem solutions.

Введение

В последние десятилетия активно развивается теория сингулярных краевых задач. Это обусловлено необходимостью исследования многочисленных практических задач, возникающих в результате научно-технического прогресса. В работах [4], [5] содержится обзор результатов для конкретных сингулярных краевых задач, возникающих в приложениях, включая атомную физику, теорию поля, теорию пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости и т.д. Значительная часть монографии [6] посвящена приложениям теории сингулярных краевых задач к различным классам задач механики хрупкого и усталостного разрушения, в частности проблеме разрушения многослойных упругих сред с трещиной.

В работах [9] и [3,40] рассмотрена математическая модель аварийных ситуаций для сложных технических систем

$$n\sigma^2\ddot{y}y^{\frac{n-1}{n}} + (x-m)\dot{y} = 0 \qquad (1)$$

$$y(-\infty) = 0, y(+\infty) = 1 \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение (1) определяет функцию *y(x)* распределения наибольшего значения случайной величины из выборки объемом n , а параметры m и σ^2 являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией генеральной совокупности случайных величин. Решение краевой задачи (1)-(2) позволяет оценивать вероятностные характеристики возможности максимального аварийного отклонения сложной технологической системы от нормального эксплуатационного режима. Получение таких вероятностных характеристик необходимо для анализа надежности сложных технических систем. Поскольку нелинейное дифференциальное уравнение (1) неразрешимо в квадратурах при $n \neq 1$, то для частного случая m=0 и σ^2=1 Ташевским А.Г. [9,261] были получены приближенные числовые значения функции распределения *y(x)* на конечном интервале $-2 \leq x \leq 3{,}2$.

В данной статье мы рассмотрим обобщение уравнения (1) и приведем доказательства теорем и лемм, сформулированных в тезисах доклада на конференции [2].

Методы и принципы исследования

Рассмотрим более общую краевую задачу

$$A\ddot{y}y^B + (x-c)\dot{y} = 0 \tag{3}$$

$$y(-\infty) = 0, y(+\infty) = 1\ , \tag{4}$$

где A>0, B≥0, c∈(-∞,+∞). Очевидно, что уравнение (1) является частным случаем дифференциального уравнения (3). В случае B=0 решением краевой задачи (3)-(4) является

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-c)^2}{2A}}dt\ .$$

Если B≠0, то решение краевой задачи (3)-(4) не выражается в явном виде. В этом случае решение ищется с помощью численных методов и компьютерного моделирования. Однако с помощью численных методов не всегда можно установить, имеет рассматриваемая задача решение или нет. Это приводит к необходимости теоретического исследования нелинейной краевой задачи (3)-(4). Проведем анализ возможного поведения решений краевой задачи (3)-(4).

Лемма 1. У любого решения краевой задачи (3)-(4) отсутствуют локальные максимумы и минимумы, отличные от нуля.

Доказательство. Предположим, что решение краевой задачи (3)-(4) имеет максимум или минимум $y(x_0) \neq 0$ в точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Тогда необходимо $\dot{y}(x_0) = 0$ и из уравнения (3) получаем $\ddot{y}(x_0) = 0$. Продифференцируем уравнение (3)

$$A\dddot{y}y^B + AB\ddot{y}\dot{y}y^{B-1} + (x-c)\ddot{y} + \dot{y} = 0\ .$$

Отсюда для $x = x_0$ имеем $\dddot{y}(x_0) = 0$. Последовательно продолжая процесс дифференцирования, всегда будет получаться $Ay^{(n)}(x_0)y^B(x_0) = 0$ и $\dot{y}(x_0) = \ddot{y}(x_0) = \cdots = y^{(n-2)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Отсюда $y^{(n)}(x_0) = 0$ для любого n и следовательно решение краевой задачи (3)-(4) является постоянной функцией

$y(x) = const$. Но постоянная функция не может одновременно удовлетворять краевым условиям (4). Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. У любого решения краевой задачи (3)-(4) отсутствуют нулевые значения внутри интервала $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Предположим, что решение краевой задачи (3)-(4) имеет нулевое значение $y(x_0) = 0$ в точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Если решение пересекает ось *Ox*, то возможны следующие два варианта:

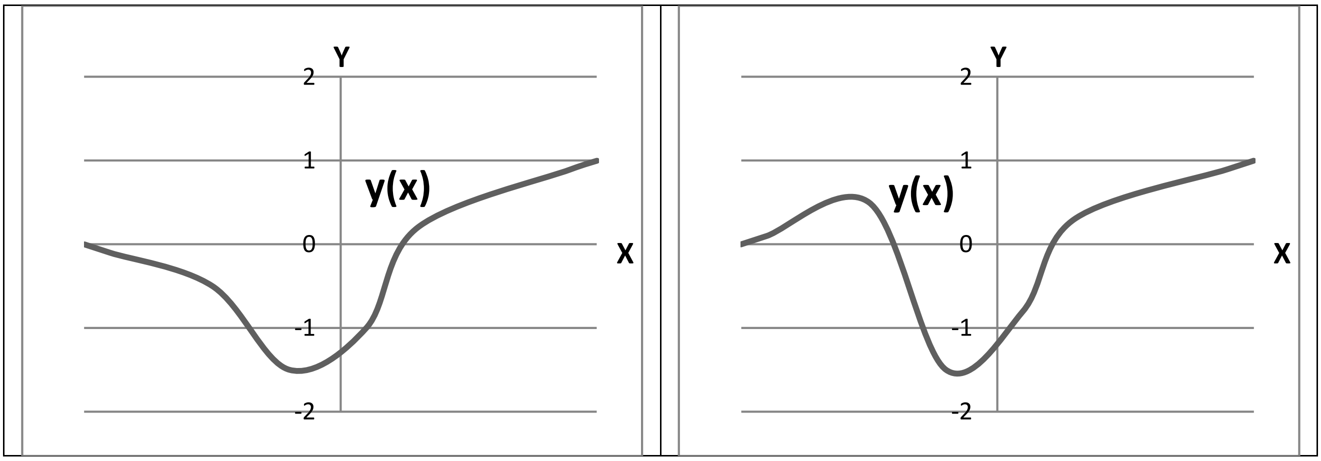

Рис. 1. Графическое изображение случаев, когда решение пересекает ось *Ox* (рис. автора)

Если решение касается оси *Ox*, то возможны следующие два варианта:

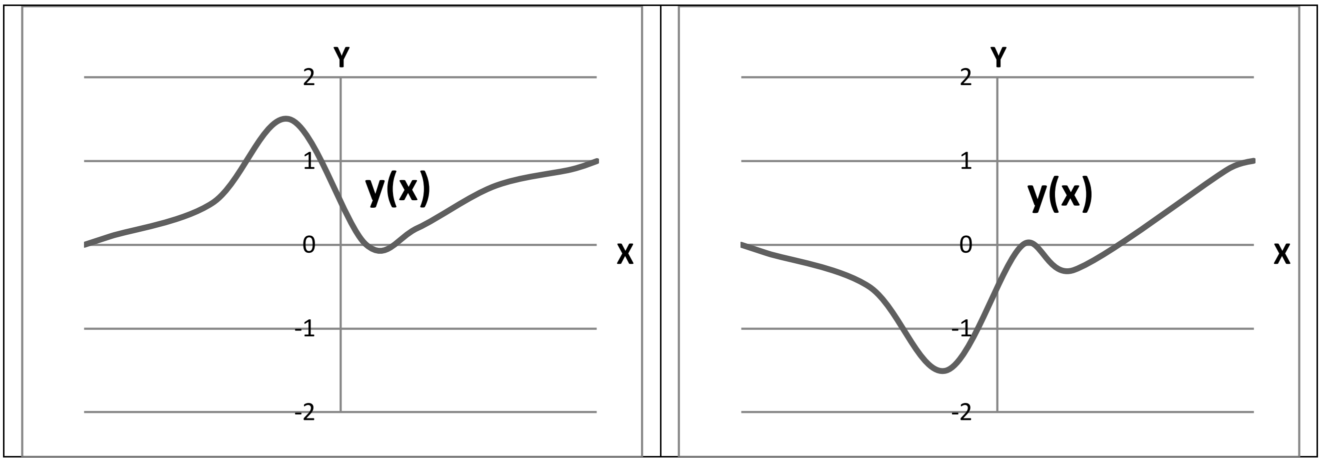

Рис. 2. Графическое изображение случаев, когда решение касается оси *Ox* (рис. автора)

Из графиков видно, что во всех возможных случаях у решения краевой задачи (3)-(4) существуют локальные максимумы или минимумы, отличные от нуля. Но это противоречит лемме 1.

Теорема 1. Любое решение краевой задачи (3)-(4) монотонно возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$ и изменяется в пределах от нуля до единицы.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 1 и леммы 2.

Таким образом, схематический график решения краевой задачи (3)-(4) имеет следующий вид

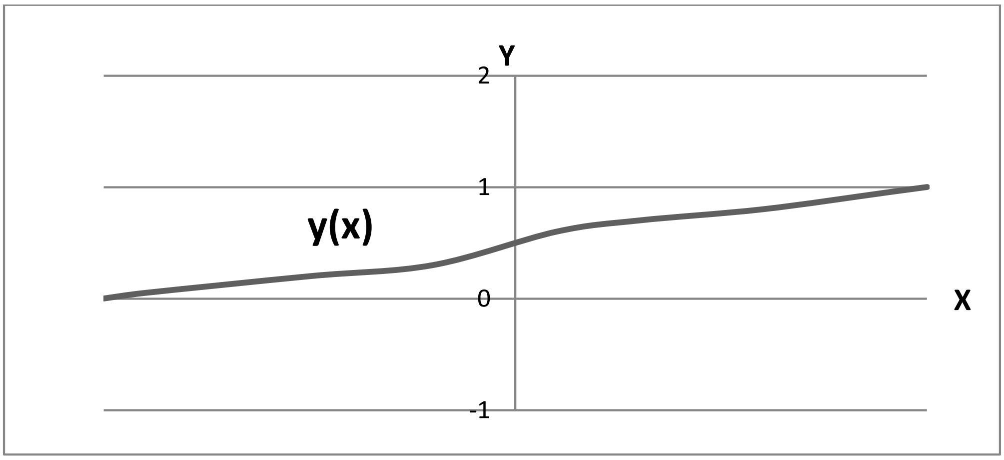

Рис. 3. Графическая форма решения краевой задачи (3)-(4) (рис. автора)

Лемма 3. У любого решения краевой задачи (3)-(4) на концах интервала $(-\infty, +\infty)$ производная обращается в ноль $\dot{y}(-\infty) = \dot{y}(+\infty) = 0$.

Доказательство. Предположим противное

$$\lim_{x\to+\infty} \dot{y}(x) = a \neq 0 .$$

Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, |a|)$ найдется δ>0, что $a - \varepsilon < \dot{y}(x) < a + \varepsilon$ для всех $x \in (\delta, +\infty)$.

Если $a < 0$, то $\dot{y}(x) < a + \varepsilon < 0$ и тогда решение краевой задачи (3)-(4) убывает на интервале $(\delta, +\infty)$, что противоречит теореме 1.

Если $a > 0$, то $\dot{y}(x) > a - \varepsilon > 0$ на интервале $x \in (\delta, +\infty)$. Так как $0 < y(\delta) < 1$ в силу теоремы 1, то получим противоречие

$$1 > 1 - y(\delta) = y(+\infty) - y(\delta) = \int_{\delta}^{+\infty} \dot{y}(x)\, dx > \int_{\delta}^{+\infty} (a-\varepsilon)\, dx = (a-\varepsilon)\int_{\delta}^{+\infty} dx = +\infty$$

Следовательно $\lim_{x\to+\infty}\dot{y}(x)=0$. Аналогично доказывается $\lim_{x\to-\infty}\dot{y}(x)=0$. Лемма доказана.

Поскольку решение краевой задачи (3)-(4) не выражается в явном виде, то решение приходится искать с помощью численных методов. При использовании численных методов бесконечный интервал $(-\infty,+\infty)$ заменяется на конечный интервал столь большой длины, которой достаточно для реализации практических целей. В этой связи вместо краевой задачи (3)-(4) будем рассматривать краевую задачу на конечном интервале $[c-l,c+l]$

$$A\ddot{y}y^B+(x-c)\dot{y}=0 \qquad (5)$$

$$y(c-l)=0, y(c+l)=1 \qquad (6)$$

В качестве l можно брать любое достаточно большое положительное число ($l\gg|c|$). Для краевой задачи (5)-(6) справедливы следующие утверждения.

Лемма 1*. У любого решения краевой задачи (5)-(6) отсутствуют локальные максимумы и минимумы, отличные от нуля.

Лемма 2*. У любого решения краевой задачи (5)-(6) отсутствуют нулевые значения внутри интервала $(c-l,\ c+l)$.

Теорема 1*. Любое решение краевой задачи (5)-(6) монотонно возрастает на отрезке $[c-l,c+l]$ и изменяется в пределах от нуля до единицы.

Доказательство этих утверждений совершенно аналогично доказательству лемм 1, 2 и теоремы 1.

Для корректного решения краевой задачи (5)-(6) численными методами необходимо сперва определить условия для существования решения. В целях исследования вопроса о существовании решения краевой задачи (5)-(6) воспользуемся базовой теоремой из теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Классическая двухточечная краевая задача имеет следующий вид

$$\ddot{y}=f(x,y,\dot{y}) \qquad (7)$$

$$y(a) = A, y(b) = B \qquad (8)$$

Здесь функция f непрерывна и $a,b.A,B$ действительные числа, причем $a<b$.

Теорема А [1,45], [7,6]. Пусть существуют числа $C,D>0$, функции $\alpha(x),\beta(x)$ для всех $x \in [a, b]$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям: $\alpha(x)\leq\beta(x)$, $\alpha(a)\leq A\leq\beta(a)$, $\alpha(b)\leq B\leq\beta(b)$,

$$\ddot{\alpha}(x) \geq f(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)) \qquad (9)$$

$$\ddot{\beta}(x) \leq f(x, \beta(x), \dot{\beta}(x)) \qquad (10)$$

Кроме того, на множестве $\{(x,u,v)$: $x \in [a, b]$, $\alpha(x)\leq u\leq\beta(x)$, $v\in(-\infty,+\infty)\}$ выполняется неравенство

$$|f(x, u, v)| \leq C + Dv^2 \qquad (11)$$

Тогда краевая задача (7)-(8) имеет решение, лежащее между α и β, т.е. $\alpha(x)\leq y(x)\leq\beta(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Определение 1. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, удовлетворяющие неравенствам (9) и (10), называются соответственно нижней и верхней функциями уравнения (7), а условие (11) называется условием Бернштейна.

Для рассматриваемого уравнения (5) в случае $B>0$ функция

$$f(x, y, \dot{y}) = -\frac{(x - c)\dot{y}}{Ay^B}$$

имеет сингулярность при $y=0$. Учитывая этот факт, для доказательства существования решения краевой задачи (5)-(6) целесообразно применять метод верхних и нижних функций и использовать теорему А. При этом нижняя функция должна удовлетворять условиям $\alpha(c-l)=0$ и $\alpha(x)>0$ для всех $x\in(c-l, c+l]$.

Основные результаты

Для доказательства существования решения краевой задачи (5)-(6) понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 4. Пусть $u(t)$ является решением задачи Коши

$$\ddot{u} = -\frac{l\sqrt{1+\dot{u}^2}}{Au^B} \qquad (12)$$

$$u(0) = 0\,, \dot{u}(0) = \lambda\,, \qquad (13)$$

где $l, \lambda, A > 0$ и 0<B<1. Тогда для достаточно большого λ найдется такая точка $\tau_\lambda \in (0,2l)$, что 0≤*u(t)*≤1 на интервале $0 \le t \le \tau_\lambda$ и $\tau_\lambda \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Интегрируя уравнение (12) при условиях (13), имеем

$$\sqrt{1+\dot{u}^2}\Big|_{\lambda}^{\dot{u}} = -\frac{l}{A}\int_0^u \frac{du}{u^B}$$

Отсюда получаем

$$\dot{u} = \sqrt{\left(\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{lu^{1-B}}{A(1-B)}\right)^2 - 1} \qquad (14)$$

Будем использовать столь большие λ, для которых $\left(\sqrt{1+\lambda^2} - lA^{-1}(1-B)^{-1}\right)^2 > 1$. Так как $\dot{u} > 0$, то *u(t)* возрастает. Обозначим через τ_λ точку, в которой $u(\tau_\lambda) = 1$. Такая точка всегда найдется. Действительно, если предположить противное 0≤u(t)<1 для всех t≥0, то из (14) следует

$$\sqrt{\left(\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{l}{A(1-B)}\right)^2 - 1} < \dot{u} \le \sqrt{\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2 - 1} = \lambda$$

Интегрируя от 0 до t, получаем

$$t\left(\left(\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{l}{A(1-B)}\right)^2 - 1\right)^{0,5} < u(t) \le \lambda t$$

Отсюда следует u(t)→∞ при t→∞, что противоречит предположению 0≤u(t)<1 для всех t≥0.

В результате интегрирования (14)

$$\int_0^{\tau_\lambda} dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{lu^{1-B}}{A(1-B)}\right)^2 - 1}}$$

получаем

$$\tau_\lambda = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{1+\lambda^2} - lA^{-1}(1-B)^{-1}u^{1-B}\right)^2 - 1}}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что τ_λ непрерывно зависит от λ и стремится к нулю при неограниченном увеличении λ. Таким образом, можно выбрать λ столь большим, чтобы $\tau_\lambda < 2l$. Лемма доказана.

Теорема 2. Для краевой задачи (5)-(6):

i) верхней функцией является $\beta(x) \equiv 1$,

ii) при выполнении условий

$$A \geq \begin{cases} 2l^2, & для\ B = 0{,}5 \\ \frac{l^2(1-2B)^{1-2B}}{4^{1-2B}(1-B)^{2-2B}}, & для\ 0 < B < 0{,}5 \end{cases} \qquad (16)$$

нижней функцией является $\alpha(x) = 2^{-2}l^{-2}(x+l-c)^2$,

iii) при выполнении условий

$$A \geq \frac{2l^2B}{1-B}\text{, } для\ 0{,}5 < B < 1 \qquad (17)$$

нижней функцией является $\alpha(x) = [lBA^{-1}(1-B)^{-1}]^{\frac{1}{B}}(x+l-c)^{\frac{1}{B}}$.

Доказательство. Обозначив

$$f(x,y,\dot{y}) = -\frac{(x-c)\dot{y}}{Ay^B}$$

представим уравнение (5) в виде

$$\ddot{y} = f(x,y,\dot{y})$$

Пусть $\beta(x)$=1 для всех $x \in [c-l, c+l]$.Так как $\ddot{\beta}(x) = 0$ и $f\big(x,\beta(x),\dot{\beta}(x)\big) = 0$, то условие (10) выполняется. Следовательно $\beta(x) \equiv 1$ является верхней функцией для уравнения (5).

Для функции

$$\alpha(x) = \frac{(x+l-c)^2}{4l^2}$$

имеем

$$\ddot{\alpha}(x) = \frac{1}{2l^2}; \quad f(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)) = -\frac{(x-c)(x+l-c)^{1-2B}}{2^{1-2B} l^{2(1-B)} A}$$

Рассмотрим два случая.

1) Если B=0,5, то для $x \in [c-l, c+l]$ имеем

$$\ddot{\alpha}(x) - f(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)) = \frac{1}{2l^2} + \frac{x-c}{lA} \geq \frac{1}{2l^2} - \frac{l}{lA} = \frac{A-2l^2}{2l^2 A}$$

В силу (16) условие (9) выполняется и следовательно $\alpha(x)$ является нижней функцией для уравнения (5).

2) В случае 0<B<0,5 имеем

$$\ddot{\alpha}(x) - f(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)) = \frac{2^{-2B} l^{-2B} A + (x-c)(x+l-c)^{1-2B}}{2^{1-2B} l^{2(1-B)} A}$$

Для числителя

$$\varphi(x) = 2^{-2B} l^{-2B} A + (x-c)(x+l-c)^{1-2B}$$

найдем минимум на отрезке $[c-l, c+l]$. На концах этого отрезка

$\varphi(c-l) = 2^{-2B} l^{-2B} A > 0$ и $\varphi(c+l) = 2^{-2B} l^{-2B} A + l(2l)^{1-2B} > 0$

Из уравнения

$$\dot{\varphi}(x) = (x+l-c)^{-2B}(2(1-B)(x-c)+l) = 0$$

находим точку минимума

$$x_0 = c - \frac{l}{2(1-B)}$$

и получаем минимальное значение

$$\varphi_{min} = \varphi(x_0) = 2^{-2B} l^{-2B} [A - 2^{4B-2} l^2 (1-B)^{2B-2} (1-2B)^{1-2B}]$$

В силу (16) имеем $\varphi_{min} \geq 0$ и тогда

$$\ddot{\alpha}(x) - f(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)) = \frac{\varphi(x)}{2^{1-2B} l^{2(1-B)} A} \geq \frac{\varphi_{min}}{2^{1-2B} l^{2(1-B)} A} \geq 0$$

Следовательно условие (9) выполняется и $\alpha(x)$ является нижней функцией для уравнения (5).

Наконец в случае 0,5<B<1 для функции

$$\alpha(x) = [lBA^{-1}(1-B)^{-1}]^{\frac{1}{B}} (x+l-c)^{\frac{1}{B}}$$

в силу (17) имеем $\alpha(x) \le 1$ для всех $x \in [c-l, c+l]$. Кроме того

$$\ddot{\alpha}(x) - f\big(x, \alpha(x), \dot{\alpha}(x)\big) = \frac{1-B}{B^2}\left(\frac{lB}{A(1-B)}\right)^{\frac{1}{B}} (x+l-c)^{\frac{1}{B}-2} +$$

$$+\left(\frac{lB}{A(1-B)}\right)^{\frac{1}{B}} \frac{(1-B)(x-c)(x+l-c)^{\frac{1}{B}-2}}{lB^2} = \frac{A}{B}\left(\frac{lB(x+l-c)}{A(1-B)}\right)^{\frac{1-B}{B}} \ge 0$$

Следовательно условие (9) выполняется и *α(x)* является нижней функцией для уравнения (5). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $0<B<1$ и выполняются условия (16)-(17). Тогда у краевой задачи (5)-(6) существует решение.

Доказательство. По теореме 2 для краевой задачи (5)-(6) верхней и нижней функциями являются соответственно $\beta(x)=1$ и $\alpha(x) = 4^{-1}l^{-2}(x+l-c)^2$ или $\alpha(x) = [lBA^{-1}(1-B)^{-1}(x+l-c)]^{\frac{1}{B}}$ в зависимости от параметра B. Легко проверить, что для этих функций на отрезке $[c-l, c+l]$ выполняются условия

$$\alpha(x) \le \beta(x),\ \alpha(c-l) \le 0 \le \beta(c-l),\ \alpha(c+l) \le 1 \le \beta(c+l).$$

Кроме того, $\alpha(c-l)=0$ и $\alpha(x)>0$ для всех $x \in (c-l, c+l]$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{y} = -\frac{(x-c)\dot{y}}{Ay^B} \tag{18}$$

$$y(c-l+n^{-1}) = \alpha(c-l+n^{-1}),\ y(c+l) = 1\ , \tag{19}$$

где n произвольное натуральное число. Ясно, что для этой задачи верхней и нижней функциями также являются $\beta(x)=1$ и $\alpha(x) = 2^{-2}l^{-2}(x+l-c)^2$ или $\alpha(x) = [lBA^{-1}(1-B)^{-1}(x+l-c)]^{\frac{1}{B}}$. На множестве

$$\{(x, y, \dot{y}): x \in [c-l+n^{-1}, c+l],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \dot{y} \in (-\infty, +\infty)\}$$

для функции из правой части (18) выполняется условие Бернштейна

$$|f(x,y,\dot{y})| = \left|\frac{(x-c)\dot{y}}{Ay^B}\right| \le \frac{|x-c||\dot{y}|}{A|y^B|} \le \frac{2l|\dot{y}|}{A|\alpha^B|} \le \frac{2l|\dot{y}|}{A|\alpha^B(c-l+n^{-1})|} \le$$

$$\le \frac{l(1+\dot{y}^2)}{A\alpha^B(c-l+n^{-1})} = K(1+\dot{y}^2)\ ,$$

где $K = lA^{-1}\alpha^{-B}(c - l + n^{-1})$. Следовательно, у краевой задачи (18)-(19) по теореме А существует решение $y_n(x)$ для любого натурального n , причем α(x)≤ $y_n(x)$≤β(x) на отрезке $[c - l + n^{-1}, c + l]$. При неограниченном возрастании n получим множество решений $y_n(x)$, из которого диагональным процессом [8, 207] можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на отрезке $[c - l, c + l]$ к решению $y_0(x)$ уравнения (18), причем α(x)≤ $y_0(x)$≤β(x) для всех $x \in [c - l, c + l]$.

Поскольку $y_n(c + l) = 1$ для всех $n \in N$ и 0=α(c-l)≤ $y_0(c - l)$≤β(c-l)=1 , то $y_0(c + l) = 1$ и 0≤ $y_0(c - l)$≤1 . Покажем, что $y_0(c - l) = 0$. Для этого рассмотрим функцию $v(x) = u(x - c + l)$, где $u(t)$ из леммы 4 после замены $t = x - c + l$. Для этой функции имеем $v(c - l) = u(0) = 0$ и $\dot{v}(c - l) = \dot{u}(0) = \lambda$. Кроме того

$$\dot{v} = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{du(x - c + l)}{dx} = \frac{du(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{u}\frac{d(x - c + l\,)}{dx} = \dot{u}$$

$$\ddot{v} = \frac{d\dot{v}(x)}{dx} = \frac{d\dot{u}(x - c + l)}{dx} = \frac{d\dot{u}(t)}{dt}\frac{dt}{dx} = \ddot{u}\frac{d(x - c + l\,)}{dx} = \ddot{u}$$

Следовательно $v(x)$ является решением задачи Коши

$$\ddot{v} = -\frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2}}{Av^B} \tag{20}$$

$$v(c - l) = 0\,, \dot{v}(c - l) = \lambda\,. \tag{21}$$

Согласно лемме 4, при достаточно большом λ найдется такое значение $\tau \in (c - l, c + l)$, что $0 \le v(x) \le 1$ для всех x∊$[c - l, \tau]$ и $v(\tau) = 1$. Покажем, что для достаточно больших n решения $y_n(x)$ краевой задачи (18)-(19) удовлетворяют условию

$$y_n(x) \le v(x) \quad \forall x \in [c - l + n^{-1}, \tau]. \tag{22}$$

Из условия (21) следует существование такого натурального числа m , что $\dot{v}(x) \ge \lambda/2$ для всех x∊$[c - l, c - l + m^{-1}]$. В результате интегрирования

$$\int_{c-l}^{x} \dot{v}(x)dx \ge \int_{c-l}^{x} \frac{\lambda}{2}dx$$

получаем $v(x) \geq 2^{-1}\lambda(x-c+l)$ для всех $x \in [c-l, c-l+m^{-1}]$. Полагая $n \geq max\left\{m; 2^{-1}(\lambda^B l)^{\frac{1}{B-1}}\right\}$, где $0{,}5 \leq B < 1$, и учитывая условия (17) и (19), имеем следующие оценки

$$y_n(c-l+n^{-1}) = \alpha(c-l+n^{-1}) \leq (2ln)^{-\frac{1}{B}} \leq (2n)^{-1}\lambda \leq v(c-l+n^{-1}) .$$

В силу теоремы 1* имеем $y_n(\tau) \leq 1 = v(\tau)$. Если предположить, что условие $y_n(x) \leq v(x)$ не выполняется для всех $x \in [c-l+n^{-1}, \tau]$, то в этом случае найдется такой подинтервал $(a,b) \subset [c-l+n^{-1}, \tau]$, в котором разность $w(x) = y_n(x) - v(x) > 0$ и на концах которого $w(a) = w(b) = 0$. Но тогда у функции $w(x)$ существует максимум на (a,b) , то есть существует точка $x_0 \in (a,b)$, в которой $w(x_0) > 0$, $\dot{w}(x_0) = 0$, $\ddot{w}(x_0) \leq 0$.

С другой стороны, учитывая (18) и (20), получаем

$$\ddot{w}(x_0) = \ddot{y_n}(x_0) - \ddot{v}(x_0) = -\frac{(x_0-c)\dot{y_n}(x_0)}{A{y_n}^B(x_0)} + \frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2(x_0)}}{Av^B(x_0)} \geq$$

$$\geq -\frac{|x_0-c||\dot{y_n}(x_0)|}{A{y_n}^B(x_0)} + \frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2(x_0)}}{Av^B(x_0)} \geq -\frac{l\sqrt{1+\dot{y_n}^2(x_0)}}{A{y_n}^B(x_0)} + \frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2(x_0)}}{Av^B(x_0)} =$$

$$= \frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2(x_0)}}{A}\left(-\frac{1}{{y_n}^B(x_0)} + \frac{1}{v^B(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{l\sqrt{1+\dot{v}^2(x_0)}}{A{y_n}^B(x_0)v^B(x_0)}\left({y_n}^B(x_0) - v^B(x_0)\right) > 0$$

Полученное противоречие доказывает оценку (22). Следовательно, при неограниченном возрастании n выполняются неравенства

$$\alpha(x) \leq y_n(x) \leq v(x) \;\; \forall x \in [c-l+n^{-1}, \tau]$$

и для сходящейся подпоследовательности получается

$$\alpha(x) \leq y_0(x) \leq v(x) \;\; \forall x \in [c-l, \tau]$$

Отсюда следует

$$0 = \alpha(c-l) \leq y_0(c-l) \leq v(c-l) = 0$$

Таким образом $y_0(c-l)=0$ и $y_0(x)$ является решением краевой задачи (5)-(6). Теорема доказана.

Заключение

В силу теоремы 3 область значений параметров, при которых краевая задача (5)-(6) гарантированно имеет решение, описывается системой неравенств:

$$0 < B < 1; \quad A \geq \begin{cases} \dfrac{l^2(1-2B)^{1-2B}}{4^{1-2B}(1-B)^{2-2B}}, \textit{для } 0 < B < 0{,}5 \\ 2l^2, \qquad \textit{для } B = 0{,}5 \\ \dfrac{2l^2B}{1-B}, \textit{для } 0{,}5 < B < 1 \end{cases}$$

Для параметров, удовлетворяющим этим неравенствам, с помощью метода Рунге-Кутта [10, 201] находятся численные решения краевой задачи (5)-(6). Согласно теореме 1* решения имеют форму монотонно возрастающих линий от нуля до единицы. В качестве примеров ниже представлены графики решений краевой задачи (5)-(6) для различных параметров *A, B, c*.

Как видно из рисунков 4 и 5, смоделированные решения краевой задачи (5)-(6) имеют *S*-образную форму. Такая форма согласуется с утверждениями теоремы 1 и леммы 3.

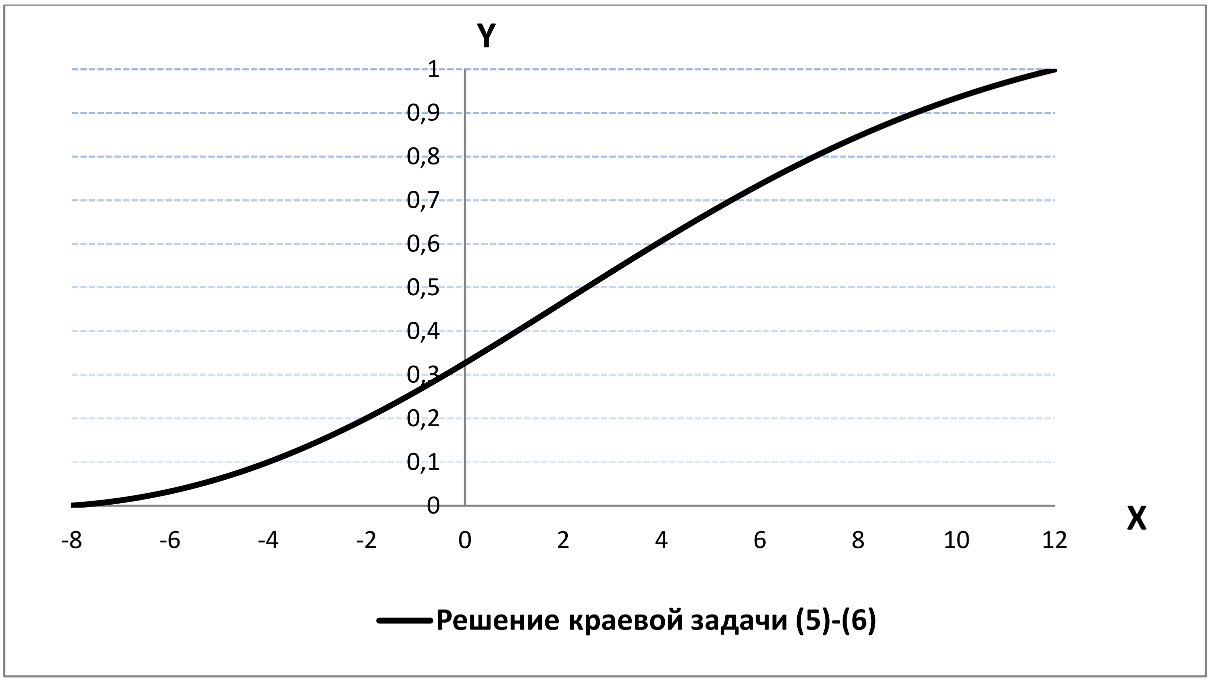

Рис. 4. График решения краевой задачи (5)-(6) для параметров A=54 , B=0,25 , c=2 (рис. автора)

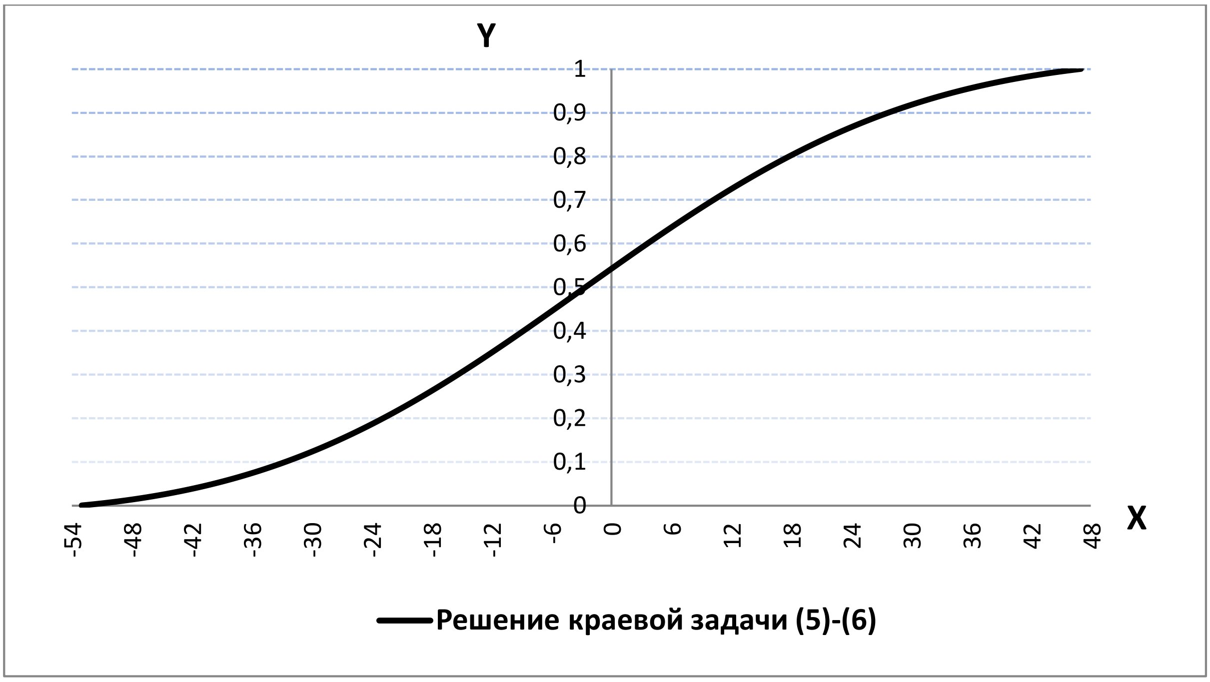

Рис. 5. График решения краевой задачи (5)-(6) для параметров A=700 , B=0,04 , c=-3 (рис. автора)

В теории обеспечения безопасности сложных технических систем многие задачи оценки и прогноза техногенных и эксплуатационных ситуаций и процессов могут быть связаны с изучением экстремальных значений. Экстремальные распределения, задаваемые краевой задачей (1)-(2), позволяют по ограниченной информации описывать и прогнозировать с определенным уровнем доверия P экстремальные характеристики и строить математические модели «сверхредких» событий [9].

Полученные в данной статье результаты могут применяться при исследовании прикладных задач, возникающих в теории надежности и механике разрушения, в частности для определения функции гипернормального (экстремального) распределения действующей нагрузки [3].

Библиографический список

1. Васильев Н.И. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков. – Рига: изд-во «Зинатне», 1978. – 183 с.
2. Звягинцев А.И. О математической модели аварийных ситуаций для сложных технических систем / А.И. Звягинцев, В.С. Малиновский, П.П. Белоцерковский // Сборник материалов ВНМК «Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях ВО», Кострома, ВАРХиБЗ им. С.К.Тимошенко. – 2021. – С. 536-543.
3. Ивченко Б.П. Теоретические основы информационно-статистического анализа сложных систем / Б.П. Ивченко, Л.А. Мартыщенко, М.Л. Монастырский. – СПб. : изд-во «Лань», 1997. – 319 с.
4. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе. – Тбилиси: изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.
5. Кигурадзе И.Т. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / И.Т. Кигурадзе, Б.Л. Шехтер // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – 1987. – т. 30– С. 105–201.

6. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи / В.Д. Кулиев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 720 с.
7. Лепин А.Я. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / А.Я. Лепин, Л.А. Лепин. – Рига: изд-во «Зинатне», 1988. – 211 с.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – Москва: «Наука», 1974. – 480 с.
9. Ташевский А.Г. Модели аварийных ситуаций для обеспечения безопасности функционирования сложных технических систем / А.Г. Ташевский // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2013. – №1. – С. 256-263.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: «Наука», 1969. – 424 с.

Оригинальность 93%