УДК: 514.8+537.8

DOI 10.51691/2541-8327_2022_12_31

СПИНОРЫ КИЛЛИНГА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Тришин В. Н.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Тришина Н. Е.

к. ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,

Москва, Россия

Аннотация.

В заметке изложены элементарные сведения о спинорах Киллинга, которые описывают "скрытые" симметрии пространства-времени в общей теории относительности. Изложение, ориентированное на студентов, основано на использовании формализма Ньюмена-Пенроуза. Описаны условия интегрируемости уравнений, определяющих спиноры Киллинга, и свойства соответствующего пространства-времени.

Ключевые слова: спиноры Киллинга, конформные тензоры Киллинга-Яно.

KILLING SPINORS IN GENERAL RELATIVITY

Trishin V. N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Trishina N. E.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia

Abstract.
The note contains elementary information about Killing spinors, which describe the "hidden" symmetries of space-time in the general theory of relativity. The student-oriented presentation is based on the use of the Newman-Penrose formalism. The integrability conditions of the equations defining the Killing spinors and the properties of the corresponding space-time are described..
Keywords: Killing spinors, conformal Killing-Yano tensors.

1. Введение

Данная статья посвящена изложению элементарных сведений о спинорах Киллинга. Эти объекты давно описаны в специальной литературе и хорошо известны специалистам, но в учебной литературе, предназначенной для студентов, приступающих к изучению общей теории относительности (ОТО), их изложение практически отсутствует. Предлагаемая заметка призвана восполнить этот пробел. Мы используем стандартный формализм абстрактных индексов, изложенный в [3], а также спинорный формализм Ньюмена-Пенроуза [2, 3]. Предполагается знакомство читателя с основами спинорной алгебры и спинорного анализа на многообразиях в рамках учебника [3].

Хорошо известно (см. например, [1,2]), что симметрии метрики четырехмерного пространства-времени M могут описаны с помощью векторного поля Киллинга K^{μ}, удовлетворяющего уравнениям Киллинга

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}K_{\nu} + \nabla_{\nu}K_{\mu}) = 0, \tag{1}$$

где символ ∇_{μ} означает ковариантную производную со связностью

Леви-Чивита для метрики $g_{\mu\nu}$ многообразия M.

Вектора Киллинга тесно связаны с законами сохранения в ОТО. Действительно, для любого физического поля с симметричным тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ с нулевой дивергенцией ($\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$), можно построить сохраняющий ток $j_{\mu} = T_{\mu\nu} K^{\nu}$, который в силу уравнений Киллинга удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\nabla^{\mu} j_{\mu} = K^{\mu} \nabla^{\nu} T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \nabla^{\mu} K^{\nu} = 0. \quad (2)$$

То же самое верно для пробной частицы с 4-импульсом p^{μ}, которая движется по геодезической линии многообразия M. Уравнения геодезической имеют вид

$$p^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu} = 0, \quad (3)$$

поэтому в силу уравнений Киллинга вдоль геодезической будет сохраняться величина $Q = K_{\mu} p^{\mu}$:

$$p^{\mu} \nabla_{\mu} Q = K_{\nu} p^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\nu} + p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} K_{\nu} = 0. \quad (4)$$

Уравнения Киллинга для векторных полей допускают обобщение на случай спинорных полей вида $\varphi^{A \dots D}_{A' \dots D'}$. Мы рассмотрим простейший случай для симметричного спинора $\varphi_{AB} = \varphi_{(AB)}$, который удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{A'(A} \varphi_{BC)} = 0. \quad (5)$$

Решения этого уравнения называют *спинорами Киллинга*. Они определяют интеграл движения вдоль любой изотропной геодезической.

2. Конформный тензор Киллинга-Яно

Спинорное уравнение (5) можно переписать в тензорной форме, используя стандартную технику перехода от спинорной формы записи к тензорной [3]. Для это введем антисимметричный тензор $Q_{\mu\nu}$, соответствующий спинору φ_{AB}, по следующей формуле:

$$Q_{\mu\nu} = \varphi_{AB} \varepsilon_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'} \varepsilon_{AB}. \quad (6)$$

Этот тензор называется *конформный тензор Киллинга-Яно*. Если спинор φ_{AB} удовлетворяет уравнению (5), то можно показать, что тензор $Q_{\mu\nu}$ должен быть решением уравнения

$$\nabla_\alpha Q_{\mu\nu} = \nabla_{[\alpha} Q_{\mu\nu]} - \frac{2}{3}\nabla_\sigma Q^\sigma_{[\mu} g_{\nu]\sigma}, \qquad (7)$$

или эквивалентного уравнения

$$\nabla_{(\mu} Q_{\nu)\alpha} = \frac{1}{3}\nabla_\sigma (g_{\mu\nu} Q^\sigma_\alpha - Q^\sigma_{(\mu} g_{\nu)\alpha}). \qquad (8)$$

Действительно, уравнение (5) можно переписать в виде

$$\nabla_{AA'}\varphi_{BC} = \frac{2}{3}(\varepsilon_{A(B} K_{C)A'}), \qquad (9)$$

где введен комплексный вектор $K_\mu = K_{AA'} = \nabla_{BA'}\varphi^B_A$, причем $\nabla^\alpha Q_{\alpha\mu} = -(K_\mu + \bar{K}_\mu)$. Используя это уравнение ковариантную производную $\nabla_\alpha Q_{\mu\nu}$ путем прямых вычислений можно записать в виде (7).

Отметим два важных специальных класса решений уравнения (7), определяющего конформный тензор Киллинга-Яно, а значит и уравнения (5) для спинора Киллинга.

1. Если векторное поле K_μ для спинора Киллинга действительное ($K_\mu - \bar{K}_\mu = 0$), то несложно проверить, что дифференциальная форма Q является замкнутой: $dQ = 0$, т.е. $\nabla_{[\alpha} Q_{\mu\nu]} = 0$. Тогда *замкнутый конформный тензор Киллинга-Яно* удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\alpha Q_{\mu\nu} = -\frac{2}{3}\nabla_\sigma Q^\sigma_{[\mu} g_{\nu]\sigma}. \qquad (10)$$

2. Если векторное поле K_μ для спинора Киллинга мнимое ($K_\mu + \bar{K}_\mu = 0$), то тензор $Q_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{(\mu} Q_{\nu)\alpha} = 0, \qquad (11)$$

и называется *тензор Киллинга-Яно*.

3. Уравнения спинора Киллинга в формализме Ньюмена-Пенроуза

Для практических вычислений в задачах ОТО уравнения спинора Киллинга (5) записывают в формализме Ньюмена-Пенроуза. Для этого выберем нормированную ($o_A \iota^A = 1$) спинорную диаду (спиновую систему отсчета) o^A, ι^A, ассоциированную со стандартной комплексной изотропной тетрадой $l^\mu = o^A o^{A'}$, $m^\mu = o^A \iota^{A'}$, $\bar{m}^\mu = o^{A'} \iota^A$, $n^\mu = \iota^A \iota^{A'}$. Спинор Киллинга имеет следующеее представление через элементы диады:

$$\varphi_{AB} = \varphi_0 \iota_A \iota_B - 2\varphi_1 o_{(A} \iota_{B)} + \varphi_2 o_A o_B, \quad (12)$$

где $\varphi_0 = \varphi_{AB} o^A o^B$, $\varphi_1 = \varphi_{AB} o^A \iota^B$, $\varphi_2 = \varphi_{AB} \iota^A \iota^B$ – соответствующие спинорные компоненты спинора Киллинга в диадном базисе.

Тогда, используя спиновые коэфициенты [3] для выбранной тетрады, мы получим явное (компонентное) представление уравнения (5) в виде следующих восьми уравнений:

$$D\varphi_0 = 2\varepsilon\varphi_0 - 2\kappa\varphi_1 \quad (13)$$

$$\delta\varphi_0 = 2\beta\varphi_0 - 2\sigma\varphi_1 \quad (14)$$

$$\bar{\delta}\varphi_2 = 2\lambda\varphi_1 - 2\alpha\varphi_2 \quad (15)$$

$$\Delta\varphi_2 = 2\nu\varphi_1 - 2\gamma\varphi_2 \quad (16)$$

$$D\varphi_1 + \frac{1}{2}\bar{\delta}\varphi_0 = (\alpha + \pi)\varphi_0 - \rho\varphi_1 - \kappa\varphi_2 \quad (17)$$

$$\delta\varphi_1 + \frac{1}{2}\Delta\varphi_0 = (\gamma + \mu)\varphi_0 - \tau\varphi_1 - \sigma\varphi_2 \quad (18)$$

$$\bar{\delta}\varphi_1 + \frac{1}{2}D\varphi_2 = \lambda\varphi_0 + \pi\varphi_1 - (\varepsilon + \rho)\varphi_2 \quad (19)$$

$$\Delta\varphi_1 + \frac{1}{2}\delta\varphi_2 = \nu\varphi_0 + \mu\varphi_1 - (\beta + \tau)\varphi_2 \quad (20)$$

где $D = l^\mu \nabla_\mu$, $\delta = m^\mu \nabla_\mu$, $\bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu$, $\Delta = n^\mu \nabla_\mu$. Интегрируя эти уравнения для заданной тетрады, мы получим спиноры Киллинга, которые могут существовать в выбранной метрике.

Если вектора тетрады l^μ и n^μ выбрать вдоль главных изотропных направлений (ГИН) спинора Киллинга, то φ_{AB} будет иметь следующий вид

$$\varphi_{AB} = \varphi o_{(A} \iota_{B)}, \quad (21)$$

и система из восьми уравнений (13-20) принимает вид четырех условий на спиновые коэффициенты тетрады:

$$\kappa = 0, \quad \sigma = 0, \quad \nu = 0, \quad \lambda = 0, \tag{22}$$

и четырех уравнений для компоненты спинора φ:

$$D\varphi = -\rho\varphi, \quad \delta\varphi = -\tau\varphi, \quad \bar{\delta}\varphi = \pi\varphi, \quad \Delta\varphi = \mu\varphi. \tag{23}$$

Заметим, что условия (22) означают, что ГИН спинора Киллинга задают бессдвиговые геодезические изотропные конгруэнции [4] в пространстве M.

4. Условия интегрируемости уравнений для спинора Киллинга

Для нахождения условий интегрируемости продифференцируем уравнение (9) еще один раз и вычислим коммутатор ковариантных производных. Из тождества Риччи для антисамодуальной части коммутатора $\blacksquare_{AB}\varphi_{CD} = \nabla_{X'(A}\nabla^{X'}{}_{B)}\varphi_{CD}$ получим

$$\blacksquare_{AB}\varphi_{CD} = 2\Psi_{ABX(C}\varphi^{X}{}_{D)} + 2\Lambda(\varepsilon_{C(A}\varphi_{B)D} + \varepsilon_{D(A}\varphi_{B)C}), \tag{24}$$

где Ψ_{ABCD} – конформный спинор Вейля, а $R = \Lambda/24$ скалярная кривизна метрики.

С другой стороны, из правой части уравнения (9) следует, что

$$\blacksquare_{AB}\varphi_{CD} = -\frac{1}{3}(\nabla_\mu K^\mu \varepsilon_{A(C}\varepsilon_{D)B} + \varepsilon_{C(A}\eta_{B)D} + \varepsilon_{D(A}\eta_{B)C}), \tag{25}$$

где введен спинор $\eta_{AB} = \nabla_{X'(A}K^{X'}{}_{B)}$. Приравнивая получившееся выражения и выделяя неприводимые части, получим следующие условия:

$$\nabla_\mu K^\mu = 0 \tag{26}$$

$$\eta_{AB} = \frac{3}{2}\Psi_{ABCD}\varphi^{CD} - 6\Lambda\varphi_{AB} \tag{27}$$

$$\Psi_{X(ABC}\varphi^{X}{}_{D)} = 0 \tag{28}$$

Последнее условие означает, что в пространствах, допускающих спинор Киллинга, конформный спинор Вейля должен иметь вид $\Psi_{ABCD} \sim \varphi_{(AB}\varphi_{CD)}$, т.е. пространство должно быть типа D, N или O (конформно-плоским) по Петрову. Если спинор Киллинга алгебраически-специальный ($\varphi_{AB}\varphi^{AB} = 0$), то пространство может быть только типа N. Для алгебраически общего спинора Киллинга пространство принадлежит типу D, причем ГИН спинора Киллинга и Вейля совпадают, определяя, как мы видели раньше, бессдвиговые изотропные геодезические.

Из самодуальной части коммутатора ковариантных производных $\blacksquare_{A'B'}\varphi_{CD} = \nabla_{X(A'}\nabla^{X}{}_{B')}\varphi_{CD}$ получим условие

$$\nabla^{(A'}_{(C}K^{B')}_{D)} = 3\Phi^{A'B'X}{}_{(C}\varphi_{D)X}, \qquad (29)$$

где $\Phi_{A'B'CD}$ – спинор Риччи.

Отметим, что если метрика многообразия M удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, то $\Phi_{A'B'CD} = 0$ и $\Lambda = 0$. Тогда из уравнений (26) и (29) следует, что векторное поле $K_{\mu} = \nabla_{BA'}\varphi^{B}{}_{A}$ является решением уравнений Киллинга (1), определяя тем самым симметрию пространства-времени. Разумеется, не любой вектор Киллинга можно получить таким образом из спинора Киллинга.

Таким образом, мы описали основные свойства спиноров Киллинга, включая условия интегрируемости. Изложенный материал можно использовать при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов, посвященных общей теории относительности.

Библиографический список

1. Wald R.M. General relativity. - The University of Chicago Press, 1984. - 491p.

2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. Cambridge University Press. 2003

3. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol 1: Two-spinor calculus

and relativistic fields. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1984.

4. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol 2: Spinor and twistor methods in space-time geometry. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1988.

Оригинальность 93%