УДК 378.147+ 378.046.4

DOI 10.51691/2541-8327_2022_12_29

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИМЕРЫ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ЦОС NOMOTEX

Облакова Т.В.

к.ф.-м.н., доцент кафедры,

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Зубарев К.М.

Старший преподаватель кафедры

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Сальникова А.А.

Старший преподаватель кафедры

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Шинаков Д.С.

Студент,

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация. В работе представлены результаты разработки математических и инженерных примеров, иллюстрирующих понятия случайной величины и функции плотности распределения случайной величины. Созданные примеры демонстрируют законы распределения вероятностей в различных областях науки, и в природе. Математические примеры размещены в цифровой образовательной среде Nomotex и используются в курсе "Теория вероятностей и математическая статистика", который читается в МГТУ имени Н.Э. Баумана для студентов инженерных специальностей.

Ключевые слова: цифровая образовательная среда, математический пример, случайная величина, плотность распределения, компьютерная визуализация.

MATHEMATICAL AND ENGINEERING EXAMPLES OF RANDOM VARIABLE DISTRIBUTION LAW IN DLS NOMOTEX

Oblakova T.V.

Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Zubarev K.M.

Senior Lecturer

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Salnikova A.A.

Senior Lecturer

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Shinakov D.S.

student

Bauman Moscow state technical University,

Moscow, Russia

Abstract. The paper presents the results of the development of mathematical and engineering examples illustrating the concepts of a random variable and the distribution density function of a random variable. The created examples demonstrate the laws of probability distribution in various fields of science and in nature. Mathematical examples are placed in the digital educational environment Nomotex and are used in the course "Probability Theory and Mathematical Statistics", which is read at the Bauman Moscow State Technical University for engineering students.

Key Words: digital learning system, mathematical example, random variable, distribution density, computer visualization.

Введение.

На кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11) под руководством её заведующего, профессора Юрия Ивановича Димитриенко создана информационно-образовательная среда для математической подготовки инженеров Nomotex [15]. Nomotex визуализирует сложные понятия высшей математики и уже становится важной составляющей работы преподавателей и самостоятельной подготовки студентов [5,6,7]. Среда позволяет проводить аудиторные занятия – лекции и семинары – с использованием интерактивной доски или проектора. Она же дает студентам возможность вести и самостоятельную работу, используя для этого различные гаджеты в любом удобном месте.

Ключевые особенности ИОС NOMOTEX состоят в применении новой нейросетевой модели представления знаний, основанной на «квантах знаний» и связях между ними (Рис. 1) [10].

Чтение лекций с использованием ИОС NOMOTEX сопровождается показом на интерактивной доске необходимого теоретического материала, который дополняется математическими примерами, реализованными средствами компьютерной визуализации. Кроме того, теоретический материал дополняется инженерными примерами, которые демонстрирует применение той или иной области знаний в прикладных инженерных науках.

В курсе теории вероятностей авторами статьи были разработаны и реализованы инженерные примеры, которые демонстрирует распределения вероятностей в различных областях науки, и в природе [1,2].

Случайная величина. Плотность случайной величины

Случайной величиной в теории вероятностей называется переменная, значения которой представляют собой численные исходы некоторого случайного эксперимента и для которой определенна функция распределения

$$F(x) = P(\xi < x)$$

Для непрерывных случайных величин существует неотрицательная функция $p(x)$, которая называется плотностью вероятности, она связанна с функцией распределения следующим соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x) \qquad (1)$$

Функция плотности является «визитной карточкой» закона распределения, именно по виду плотности различают один закон от другого. Существует ряд законов распределения случайной величины, которые чаще всего встречаются, например, нормальное (Гаусса), функция плотности в этом случае имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

a и σ это параметры распределения. В ЦОС NOMOTEX реализованы примеры, которые демонстрируют, где можно встретить то или иное распределение. Каждый пример иллюстрирован графиком плотности и функции распределения, а также посчитаны все основные числовые характеристики. Рассмотрим подробнее законы распределения случайных величин.

Нормальное распределение

Функция плотности распределения выглядит следующим образом [6]:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2)$$

Нормальное распределение – основное распределение теории вероятностей и математической статистики и также широко применяется в статистической физики. Случайные величины, распределённые по нормальному закону, встречаются в повседневной жизни, начиная от роста человека и заканчивая следами ботинок при выходе из метро. В образовательной среде Nomotex представлены следующие примеры случайных величин, распределённых по нормальному закону [10]:

А) Рост человека, распределён по нормальному закону с параметрами $a = M\xi = 165, \sigma = 10$, на рисунке 1 представлен математический пример в ЦОС Nomotex, иллюстрирующий нормальное распределение.

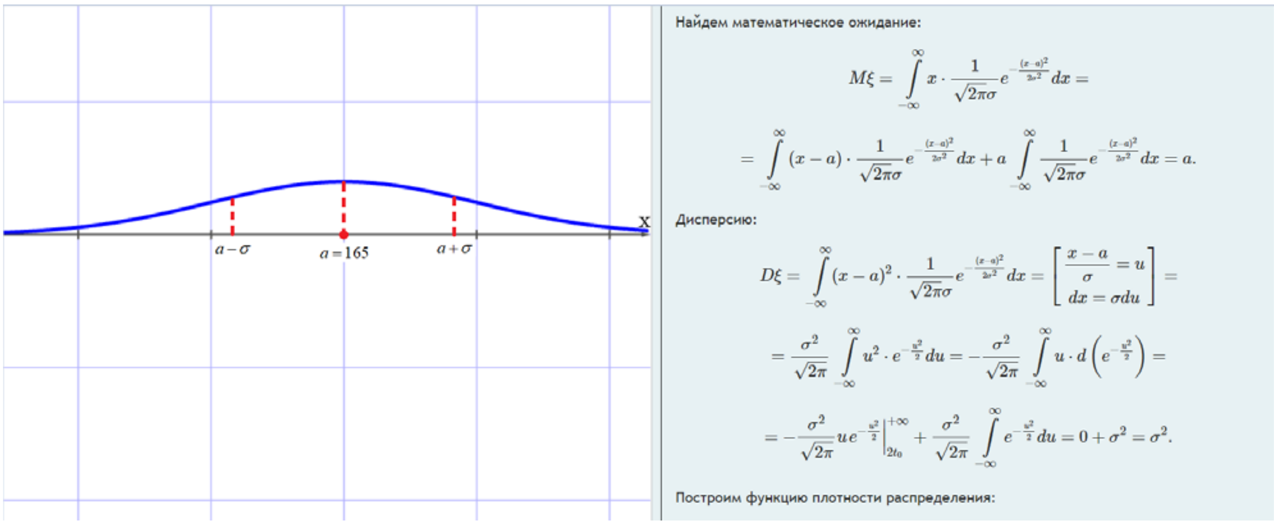

Рис.1 – График плотности нормального распределения и числовые характеристики. Источник: https://nomotex.ru

Справа вычислены числовые характеристики нормально распределённой случайно величины в общем случае. На графике отмечены значения мат ожидания, а также интервал $(a-\sigma;a+\sigma)$ в которой с вероятностью $\approx 68\%$ попадает случайная величина.

Б) Наружная сторона ствола, сучков и корней деревьев покрыта корой, которая является защитным слоем для живых тканей от воздействий окружающего мира. В нижней части дерева толщины коры максимальна, к вершине ствола она постепенно уменьшается. Толщина коры большинства деревьев не превышает 5 см и также является случайной величиной распределённой по нормальному закону с параметрами $a = M\xi = 28мм, \sigma = 4мм.$

В) Длина когтей и волос у животных распределена по нормальному закону с параметрами $a = M\xi = 5, \sigma = 0.5$

Распределение Рэлея

Функция плотности распределения выглядит следующим образом:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

В качестве инженерных примеров распределения Рэлея в ЦОС Nomotex представлены следующие случайные величины [10]

А) Разброс при стрельбе по мишени является случайной величиной распределённой по закону Рэлея, на рисунке 2 представлен график плотности распределения Рэлея.

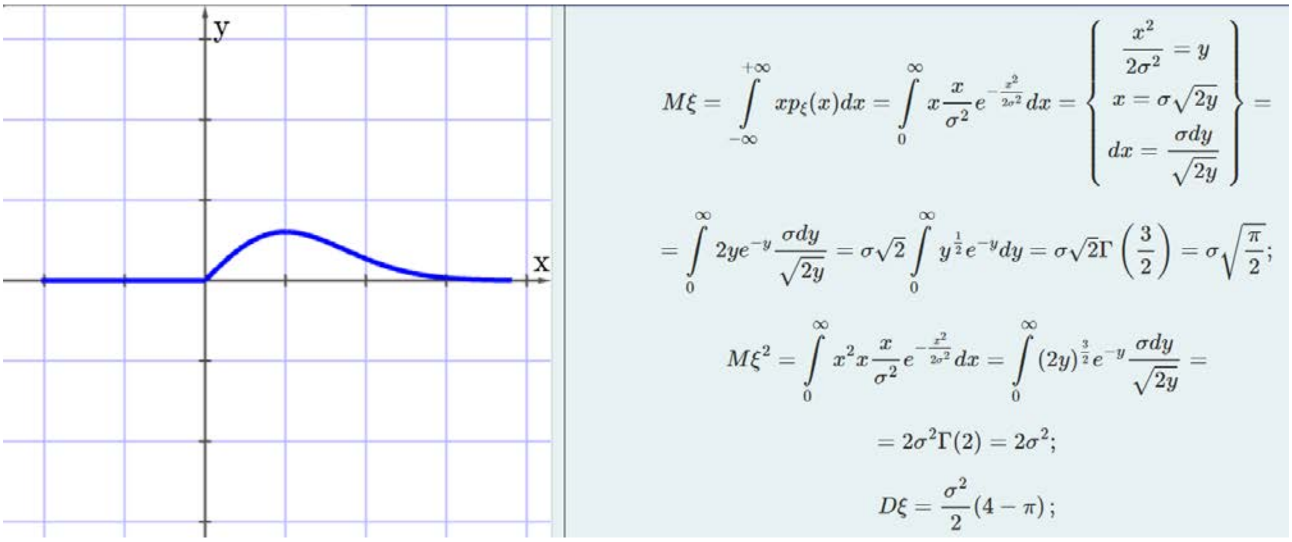

Рис.2 – График плотности распределения Рэлея и числовые характеристики.

Источник: https://nomotex.ru

Справа от графика приведены вычисления основных числовых характеристик.

Б) Описание амплитуды (в нанометрах) радиосигнала в радиотехнике $(\sigma = 1253)$

В) Зависимость реакции животных на определенные питательные вещества

Г) Определение высоты волн (в метрах) в океане $(\sigma = 8.77)$

Распределение Парето

Функция плотности распределения выглядит следующим образом:

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{kx_m^k}{x^{k+1}}, & x \ge x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases} \qquad (4)$$

изначально распределения Парето использовали для описания благосостояния, а также распределения дохода[2], «правило 20 к 80» (20 % дюдей владеет 80 % богатства) на самом деле зависит от конкретной величины k, и следовательно данное правило терпит количественные отклонения, например, данные самого Парето по Британии в его труде «Курс политической экономии» говорят, что там примерно 30 % населения владеет 70 % общего дохода. Кроме экономики распределение Парето также втречается в следующих примерах [10]

Следующие случайные величины распределены по закону Парето

А)Количество ошибок в определенном фрагменте программного кода $\left(x_m = 18.18, \alpha = 11.05\right)$

Б) Анализ охватываемой аудитории и продукции

В) Эффективность рекламной кампании

Логнормальное распределение

Функция плотности распределения выглядит следующим образом:

$$p_{\xi}\left(x\right) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right)^2} \qquad (5)$$

В ЦОС Nomotex представлены следующие примеры случайных величин распределённых по логнормальному закону

А) Длина комментария человека в социальной сети

Б) Возраст новобрачных

В) Продолжительность шахматных партий

Г) Отклонение от допустимого количества вредных веществ в продуктах питания

Д) Продолжительность медицинской операции

Показательное распределение

Функция плотности распределения выглядит следующим образом:

$$p_{\xi} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Следующие случайные величины распределены по показательному закону [10]

А) Время между заходами покупателя в магазине ($\lambda = 1.5$ за секунду)

Б) Время до распада радиоактивной частицы

В) Длительность телефонных переговоров ($\lambda = 0.5$ за минуту)

Г) Время работы лампочки до перегорания ($\lambda = 0.001$ за час)

Биномиальное распределение

Функция вероятности выглядит следующим образом:

$$P(Y = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0..n \tag{7}$$

Следующие случайные величины распределены по биномиальному закону [10]

А) Количество студентов, сдавших экзамен $(n = 20, p = 0.6)$

Б) Количество «орлов» или «решек» в некотором количестве подбрасываний монетки $(p = 0.5)$

В) Количество кликов по ссылке у посетителей сайтов $(p = 0.3)$

Г) Количество мальчиков среди новорожденных $(p = 0.5)$

Гамма-распределение

Функция плотности распределения выглядит следующим образом:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

В ЦОС Nomotex представлены следующие примеры гамма распределения [10]

А) Время ожидания деления клетки

Б) Размер страховых выплат

В) Количество осадков

Г) Возраст заболевания раком

Д) Время ожидания, пока гидравлическому насосу не понадобится ремонт

Е) Моделирование биологических процессов

Выводы.

Разработанные авторами примеры применяются в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика», читаемом студентам инженерных и математических специальностей. Представленные в ЦОС Nomotex математические и инженерные примеры помогают лучше понять суть понятия случайной величины и функции плотности распределения, а также на наглядных примерах показывают применение методов теории вероятностей в прикладных науках.

В дальнейшем в курсе математической статистики данные примеры проверяются на практических данных, оцениваются параметры распределения и проверяется гипотеза о виде распределения.

Библиографический список

1. Анисова Т.Л., Облакова Т.В. Оценка уровней достижения математических компетенций бакалавров-инженеров / Т.Л. Анисова, Т.В. Облакова // Математический вестник педвузов и университетов ВолгоВятского региона. – 2016. –18. –С.136-142.

2. Анисова Т.Л. Принципы методики обучения математике, направленной на повышение математической компетентности бакалавров/ Т.Л. Анисова // Современные проблемы науки и образования. – 2018. –№ 1. [Электронный ресурс]. – Режим доступа – URL http://www.scienceeducation.ru/ru/article/view?id=27326 (дата обращения: 15.10.2019).

3. Всероссийский семинар «Новые цифровые технологии для математической подготовки инженерных кадров» [Электронный ресурс]. –

Режим доступа – URL: http://www.bmstu.ru/mstu/news/news.html?newsid=4556 (дата обращения: 15.10.2022).

4. Джанелли М. Электронное обучение в теории, практике и исследованиях // Вопросы образования. - 2018. – № 4. С. 81–98.

5. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Новая научно-методическая модель математической подготовки инженеров/ Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. – № 11. – С. 5-10.

6. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Чебаков Д.А. Конструирование электронных интерактивных курсов в цифровой образовательной среде NOMOTEX/ Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.А. Чебаков // Дневник наук. - 2019 .- № 11

7. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Зубарев К. М., Алесин А.В., Иванова Т.Л. Автоматизация проверки математических заданий по курсу «Аналитическая геометрия» в системе Nomotex / Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения: Сборник трудов Международного форума, Москва, 28–29 ноября 2019 года. – М.: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2020. – С. 206-208.

8. Егоркина Е.Б., Иванов М.Н., Иванов Н.Н., Учеваткина Н.В. Формирование научноисследовательских компетенций студентов с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения // Сб. матер. XI Всерос. науч.-практ.конф. «Цифровые технологии в образовании, науке, обществе». Петрозаводск, 2017. С. 52–55.

9. Зверева Ю.С. Информатизация образования [Электронный ресурс] // Молодой ученый. – 2016.–№6.3. – С.23-26. – URL: https://moluch.ru/archive/110/27234. (Дата обращения: 20.11.2022)

10. Информационно-образовательная среда NOMOTEX. [Электронный ресурс] – Режим доступа – URL: https://nomotex.bmstu.ru (Дата обращения: 25.11.2022)

10. Китова Е.Т., Скибицкий Э.Г. Информационно-образовательная среда вуза – инструментарий повышения уровня подготовки студентов/ Е.Т. Китова, Э.Г. Скибицкий // Инновации в образовании. – 2016. –№ 10. –С. 116–125.

11. Онлайн-обучение: как оно меняет структуру образования и экономику образования и экономику университета. Открытая дискуссия Я.И. Кузьминова — М. Карной // Вопросы образования. 2015. № 3. С. 8–43.

12. Селевенко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2 т. Т. 1. - М.: Народное образование, 2005. 553 с.

13. Смолкин А.М. Методы активного обучения: Науч.-метод. пособие. - М.:Высш. шк., 1991. 176 с.

14. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей – 2012.

15. Цифровое образование на кафедре ФН-11. [Электронный ресурс] – Режим доступа – URL: http://fn.bmstu.ru/news-fs11-fs-ru/740-yx-7 (Дата обращения: 25.11.2022)

Оригинальность 86%