УДК 517.97

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОДСТВА

Киселев В.В.
к.т.н., доцент,
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия
Абдуллин С.Р.
ст. преподаватель,
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматриваются задача поиска оптимальной динамики производства в условиях неопределенности при известной функции плотности вероятности спроса. Минимизируются суммарные издержки. Используются вариационные методы. В статье предлагается зафиксировать риск, решить получившееся дифференциальное уравнение для квадратичной функции издержек производства.

Ключевые слова: вариационное исчисление, теория вероятностей, динамика производства, оптимальный план, минимизация издержек.

A SPECIAL CASE OF SOLVING THE OPTIMAL PROBLEM PRODUCTION DYNAMICS

***Kiselev V. V*.**
Ph. D., associate Professor, Bauman
Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
***Abdullin S.R*.**

Art. teacher,

Moscow State Technical University. N.E. Bauman,

Moscow, Russia

Annotation

The article considers the problem of finding the optimal dynamics of production under conditions of uncertainty with a known probability density function of demand. The total costs are minimized. Variational methods are used. The article proposes to fix the risk, to solve the resulting differential equation for the quadratic function of production costs.

Key words: calculus of variations, probability theory, production dynamics, optimal plan, cost minimization.

Задача оптимальной динамики производства является частным случаем задачи рационального ведения хозяйства [4,5]. Данная задача может быть статической и динамической. При решении статических задач поиск оптимального решения обычно осуществляется с помощью методов математического программирования [2,7]. Эти методы достаточно хорошо разработаны [6]. Для решения динамических задач используют методы динамического программирования, вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина [1,3,8].

В данной статье рассматривается частный случай модели, предложенной в работе [9]. Здесь предполагается, что имеется некоторая информация о изменяющихся во времени потребностях. Обозначим величину планового периода T, возможный временной отрезок равен [0,T]. В каждый момент времени t этого периода определим функцию v=v(t) – потребность в этот момент времени. Совокупный спрос в интервале (0,t) определим интегралом

$$V(t) = \int_0^t v(t)dt,$$

где V(t) есть случайная переменная с известным законом распределения $\varphi(V(t))$.

Объем продукции в каждый момент времени задается некоторой неотрицательной функцией x(t), которую называют функцией динамики производства, тогда суммарный объем продукции на интервале (0,t) можно определить интегралом с переменным верхним пределом

$$X(t)=\int_0^t x(t)dt.$$

Предполагается, что известна функция издержек производства f(x(t)) и удельные издержки хранения, которые равны c_1. Известны удельные издержки дефицитности c_2. Издержки дефицитности возникают при недостаточности резервов, в этом случае можно брать кредит или закупать необходимою продукцию. Пусть X_0 начальный запас в момент времени t=0. Тогда, если

$$X(t)+X_0-V(t)\geq 0,$$

то суммарные издержки в момент времени t равны

$$A(t)=f(x(t))+c_1[X(t)+X_0-V(t)].$$

Если

$$X(t)+X_0-V(t)\leq 0,$$

то суммарные издержки в момент времени t равны

$$A(t)=f(x(t))-c_2[X(t)+X_0-V(t)].$$

Предполагаемая величина суммарных издержек в момент t равна математическому ожиданию

$$MA(t)=f(x(t))+c_1\int_{-\infty}^{X(t)+X_0}[X(t)+X_0-V(t)]\varphi(V)dV-c_2\int_{X(t)+X_0}^{\infty}[X(t)+X_0-V(t)]\varphi(V)dV.$$

Ожидаемые издержки за весь плановый период равны

$$I=M\int_0^T A(t)dt.$$

Требуется найти такие функции x(t) и X(t), чтобы ожидаемые издержки I были бы минимальными.

Запишем уравнение Эйлера, учитывая, что $x(t) = X^{'}(t)$

$$c_1 \int_{-\infty}^{X+X_0} \varphi(V)dV - c_2 \int_{X+X_0}^{\infty} \varphi(V)dV = f^{''}(x(t))x^{'}(t)\,. \qquad (1)$$

Здесь

$$I_1 = \int_{-\infty}^{X+X_0} \varphi(V)dV$$

есть вероятность, что дефицит не возникнет, а

$$I_2 = \int_{X+X_0}^{\infty} \varphi(V)dV$$

- вероятность того, что дефицит возникнет. Обозначим величину риска p=I_2, поскольку $I_1 + I_2 = 1$ (Это следует из свойств плотности вероятности), то выражение (1) можно переписать в виде

$$c_1(1-p) - c_2 p = f^{''}(x(t))x^{'}(t)$$

или

$$c_1 - (c_1 + c_2)p = f^{''}(x(t))x^{'}(t).$$

Таким образом

$$p = \frac{c_1 - f^{''}(x(t))x^{'}(t)}{c_1 + c_2}. \qquad (2)$$

На практике для величин риска часто используют значения 0.05 или 0.01.

Зададим величину риска α, p=α. Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

тогда $f^{''} = 2a.$ Теперь выражение (2) можно переписать так

$$\alpha = \frac{c_1 - 2ax^{'}}{c_1 + c_2}$$

или

$$x^{'} = \frac{c_1 - (c_1 + c_2)\alpha}{2a}.$$

Тогда

$$x = \frac{c_1 - (c_1 + c_2)\alpha}{2a} t + 1$$

и

$$X = \frac{c_1 - (c_1 + c_2)\alpha}{4a} t^2 + lt + m.$$

По определению X(t) можно сказать, что X(0)=0, это означает, что m=0.

В практических задачах обычно задается условие в конечный момент времени. Положим, что суммарный объем производства в конечный момент времени определен и равен ожидаемому спросу в конечный момент времени

$$X(T) = MV(T) - X_0.$$

Теперь можно определить константу l. Если, например, случайная величина V имеет равномерное распределение на отрезке $[\beta, \gamma]$, то

$$MV = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Аналогичный подход применим для других законов распределения.

Библиографический список:

1. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. - М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2018.

2. Математические методы в экономике и финансах/ под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. - М.: КНОРУС, 2016. С. 244-266.

3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: АЙРИСПРЕСС, 2002.

4. Канторович Л.В. Экономический расчет оптимального использования ресурсов. - М.: Издательство АН СССР, 1960.

5. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства// сб. Применение математики в экономических исследованиях. - М., 1959.

6. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Физматлит, 2008.

7. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов. - М.: КНОРУС, 2020.

8. Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г. Оптимальное управление в экономике. - М.: Финансы и статистика, 2008.

9. Ланге О. Оптимальные решения. - М.: Наука, 1967.

Оригинальность 89%