УДК 378.147+ 378.046.4

DOI 10.51691/2541-8327_2022_12_37

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА В ЦИФРОВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ NOMOTEX

Димитриенко Ю.И.

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Зубарев К.М.

Старший преподаватель кафедры

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Алесин А.В.

Научный сотрудник

Москва, Россия

Милехина Е.Н.

Старший преподаватель кафедры

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Бебенина А.А.

Ассистент кафедры

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Аннотация

В работе представлены результаты разработки методики автоматический проверки и оценивания задач на поиск собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Сложность проверки состоит в том, что данные задачи относятся к типу задач с неоднозначным ответом. В статье описывается алгоритм организации проверки, который позволяет устранить неоднозначность ответа, а также оценить степень выполнения задачи по введённому ответу. Разработанные авторами методы проверки задач позволяют проверить результат различных заданий на собственные значения и собственные векторы. В работе приведены примеры действия алгоритма на задачах, изучаемых в курсе «Линейная алгебра» студентами МГТУ им. Н.Э. Баумана. Контрольные примеры реализованы на базе цифровой образовательной среды "Nomotex", разработанной при участии авторов данной статьи. Созданная методика автоматизации проверки заданий активно применяется в аудиторном и дистанционном обучении инженеров в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ключевые слова: цифровая образовательная среда, математический пример, линейный оператор, собственные вектора, автоматическая проверка.

AUTOMATIC CHECKING OF TASKS FOR OWN VECTORS IN DIGITAL LEARNIN SYSTEM NOMOTEX

Dimitrienko Yu. I.

Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor, Head of the Department

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Zubarev K.M.

Senior Lecturer

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Alesin A.V.

Scientific member

Moscow, Russia

Milekhina E.N.

Senior Lecturer

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Bebenina A.A.

Assistant

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

The paper presents the results of developing a methodology for automatic verification and evaluation of problems for finding eigenvalues and eigenvectors of a linear operator. The complexity of the verification lies in the fact that these tasks are of the type of tasks with an ambiguous answer. The article describes an algorithm for organizing a check, which allows you to eliminate the ambiguity of the answer, as well as assess the degree of completion of the task according to the entered answer. The problem checking methods developed by the authors make it possible to check the result of various tasks for eigenvalues and eigenvectors. The paper gives examples of the algorithm's action on problems studied in the course "Linear Algebra" by students of the Bauman Moscow State Technical University. Test cases are implemented on the basis of the digital educational environment "Nomotex", developed with the participation of the authors of this article. The created methodology for automating task checking is actively used in the classroom and distance learning of engineers at the Bauman Moscow State Technical University.

Key Words: digital learning system, mathematical example, linear operator, eigenvectors, automatic verification.

Введение

Электронный интерактивный курс «Линейная алгебра», изучается студентами инженерных специальностей, обучающихся в МГТУ имени Н.Э. Баумана. Данный курс разработан на базе цифровой образовательной среды "Nomotex" [5,6,7], созданной на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика».

Раздел «Линейный операторы» курса «Линейная алгебра» – один из основных и наиболее важных разделов курса, теория линейных операторов и собственных векторов широко применяется в математике, физике, химии и в прикладных инженерных науках. Собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$, определяются однозначно из уравнения $Ax = \lambda x$, где λ собственное значения оператора $\mathbf{A}$, а вектор x, удовлетворяющий данному уравнению – собственный вектор. В отличие от собственных значений, собственные вектора определяются неоднозначно, одному собственному значению соответствует множество собственных векторов. Чтобы устранить неоднозначность ответа, в ЦОС Nomotex был создан алгоритм, который позволяет автоматически установить правильность ответа студента вне зависимости от того, в какой форме он был введён [10,11,13].

Для данного типа задач также была создана система оценивания, которая позволяет по введённому ответу установить степень выполнения задачи. Разработанный алгоритм реализован в контрольных примерах, созданных в ЦОС Nomotex и применяется в рамках всех контрольных мероприятий в курсе линейной алгебры [3,8,9].

Собственные значения и собственные вектора линейного оператора

В линейном пространстве размерности n задан линейный оператор $\mathbf{A}$, который в некотором базисе имеет матрицу A. Собственные значения определяются из уравнения

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

Преобразуем данное уравнение

$$\left(A-\lambda E\right)x=0 \tag{2}$$

Полученное выражение является однородной системой линейных уравнений. Так как собственный вектор не может быть нулевым, то необходимо чтобы у системы существовало ненулевое решение, для этого определитель основной матрицы СЛАУ должен быть равен нулю.

$$\left|A-\lambda E\right|=0 \tag{3}$$

Таким образом собственные значения определяются однозначно из уравнения (3). Далее для поиска собственных векторов найденные собственные значения подставляются в уравнение (2) и решается неоднородная система уравнений, которая при каждом λ имеет бесконечное множество решений.

Если число линейно независимых собственных векторов равно размерности линейного пространства, то в базисе из собственных векторов матрица линейного оператора будет иметь диагональный вид, который удобно использовать при решении различных прикладных задач.

Таким образом при решении задачи можно выделить следующие основные шаги

1. Поиск собственных значений
2. Поиск собственных векторов
3. Построение базиса из собственных векторов
4. Вид матрицы линейного оператора в базисе из собственных векторов

В ЦОС Nomotex был разработан ряд задач на собственные значения и собственные вектора линейного оператора с автоматической проверкой.

Задача на нахождение собственных векторов

В данной задаче студенту необходимо найти собственные значения и собственные вектора. На рисунке 1 изображена форма для ввода ответа на задачу в ЦОС Nomotex.

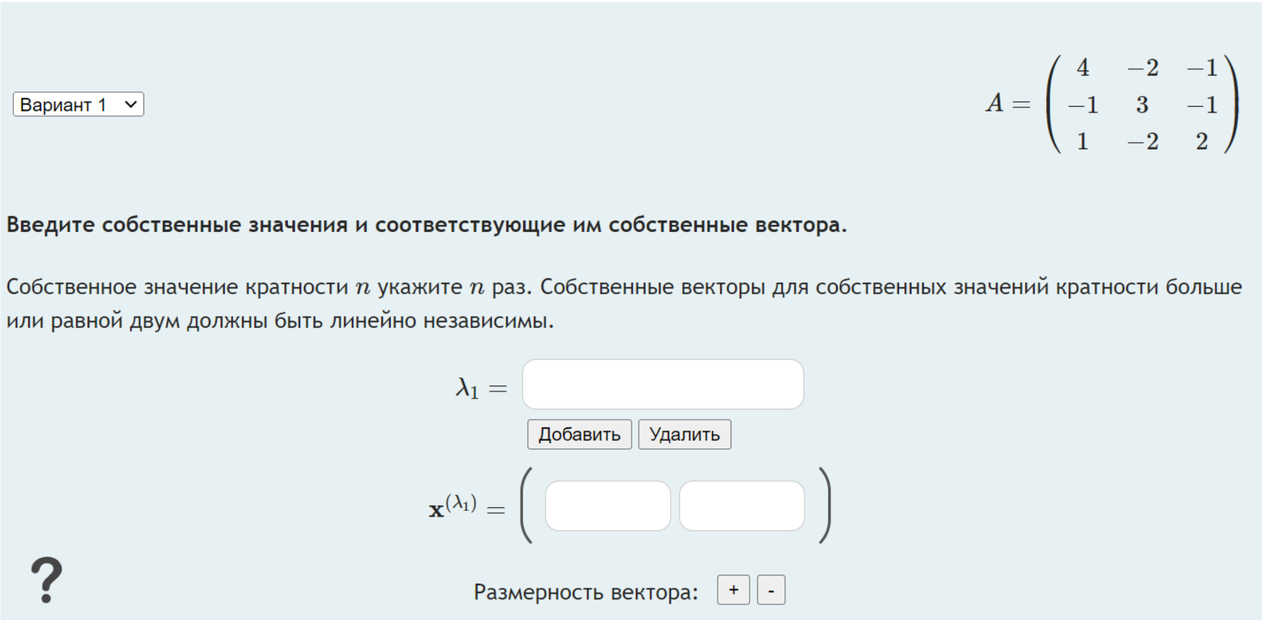

Рис.1 – Форма ввода ответа на задачу о собственных векторах. Источник: https://nomotex.ru

Собственные значения кратности n (алгебраическая кратность корня) указывается n раз. Далее студенту необходимо ввести собственные вектора.

Количество форм для введения собственных значений и собственных векторов можно регулировать соответствующими кнопками Алгоритм проверки в данной задаче следующий:

1. Введённые собственные значения сравниваются с верным ответом, заложенным в системе.
2. Если у линейного оператора, кратность каждого корня равна 1, то введённые собственные вектора должны быть коллинеарны векторам, заложенным в системе
3. Если кратность какого-либо собственного значения больше 1, например 2, то множество собственных векторов, соответствующих собственному значению, является линейным пространством размерности 2, и правильным

ответом в данному случае будет являться любой базис этого пространства. В такой ситуации для проверки ответы выполняются следующие действия:

3.1. Проверяется лежат ли вектора в пространстве собственных векторов.

3.2. Далее система проверяет являются ли эти вектора линейно-независимыми. Если выполняются оба пункта, то введённые студентом вектора являются собственными.

Описанный алгоритм позволяет оценивать задачу по этапам её выполнения, баллы студенты начисляются следующим образом:

1. За верно найденные собственные значения, студенту начисляется 0.4 от полного балла за задачу.

2. Оставшиеся баллы за задачу делятся на количество линейно независимых собственных векторов и начисляются за каждый найденный верно собственный вектор.

Задача на нахождение ортонормированного базиса из собственных векторов.

Также, как и в предыдущей на первом этапе необходимо найти собственные значения и собственный вектора линейного оператора, заданного в некотором базисе своей матрицей. Далее из собственных векторов необходимо составить ортонормированный базис из собственных векторов и ввести матрицу линейного оператора в этом базисе.

Стоит сказать, что не каждый линейный оператор может быть диагонализирован, поэтому варианты заданий подобраны таким образом, чтобы алгебраическая и геометрическая кратность всех собственных значений совпадала.

На рисунке 2 изображена форма для ввода ответа на данную задачу. Форма ввода ответа является универсальной для линейных пространств различной размерности. Количество собственных значений, размерность собственных векторов, а также размерность матрицы линейного оператора можно регулировать соответствующими кнопками.

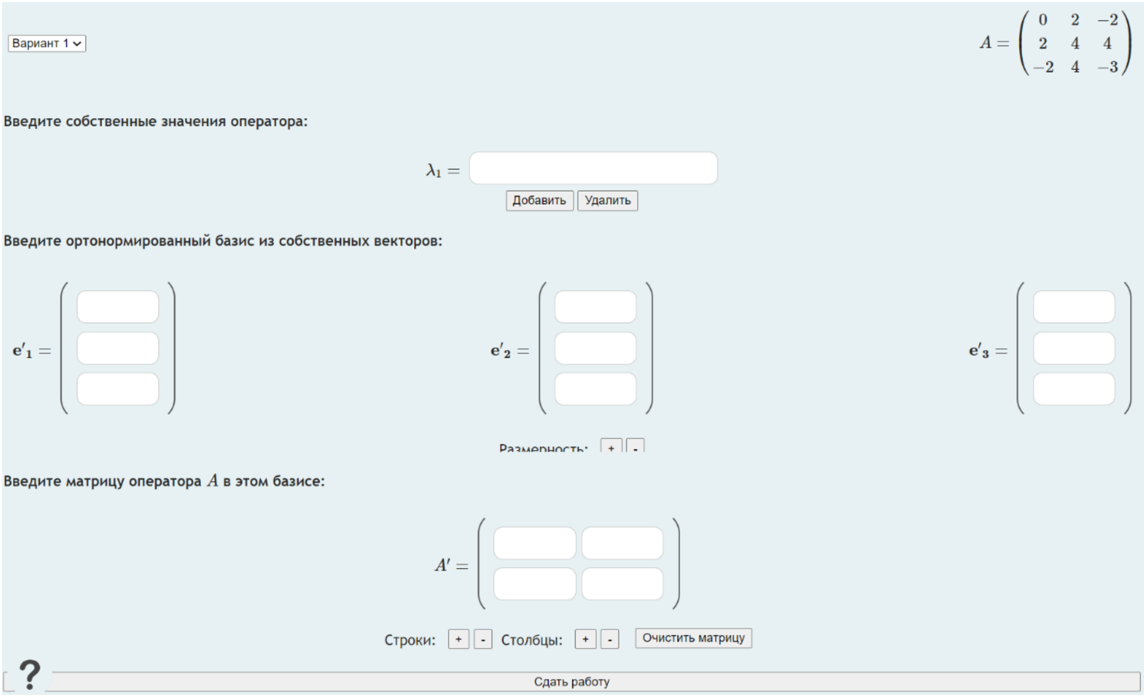

Рис.2 – Форма ввода ответа на задачу о базисе из собственных векторов. Источник: https://nomotex.ru

Для проверки введённого ответа на задачу в ЦОС Nomotex был реализован следующий алгоритм

1. Введённые собственные значения сравниваются с верным ответом, заложенным в системе.
2. Далее проверяется, что введённые вектора являются векторами единичной длины.
3. Далее из введённых векторов составляется матрица U, которая является матрицей перехода в базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет диагональный вид.
4. На следующем шаге введённые собственные вектора проверяются по формуле преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

$$A' = U^{-1}AU \tag{4}$$

В формуле (4) матрица A' - диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения, введённые студентом.

Описанный алгоритм позволяет оценивать задачу по этапам её выполнения, баллы студенты начисляются следующим образом:

1. За верно найденные собственные значения, студенту начисляется 0.3 от полного балла за задачу.

2. Если введённые студентом вектора являются базисом из собственных векторов, то начисляется 0.5 от полного балла за задачу

3. Оставшиеся 0.2 начисляются, если введённый базис является ортонормированным.

Выводы.

В работе предложены алгоритмы, которые позволяют автоматически проверить ответ в различных задачах на собственные значения и собственные вектора. Описанная методика проверки и оценивания реализована в контрольных примерах в ЦОС Nomotex, которые используются для проведения контрольных мероприятий в курсе «Линейная алгебра» в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Созданные алгоритмы могут использоваться в других задачах, решение которых требует поиска собственных значений или собственных векторов, например, при поиске Жордановой формы матрицы или при решении системы дифференциальных уравнений матричным способом.

Библиографический список

1. Анисова Т.Л., Облакова Т.В. Оценка уровней достижения математических компетенций бакалавров-инженеров / Т.Л. Анисова, Т.В.

Облакова // Математический вестник педвузов и университетов ВолгоВятского региона. – 2016. –18. –С.136-142.

2. Анисова Т.Л. Принципы методики обучения математике, направленной на повышение математической компетентности бакалавров/ Т.Л. Анисова // Современные проблемы науки и образования. – 2018. –№ 1. [Электронный ресурс]. – Режим доступа – URL http://www.scienceeducation.ru/ru/article/view?id=27326 (дата обращения: 15.10.2019).

3. Всероссийский семинар «Новые цифровые технологии для математической подготовки инженерных кадров» [Электронный ресурс]. – Режим доступа – URL: http://www.bmstu.ru/mstu/news/news.html?newsid=4556 (дата обращения: 15.10.2022).

4. Джанелли М. Электронное обучение в теории, практике и исследованиях // Вопросы образования. 2018. – № 4. С. 81–98.

5. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Новая научно-методическая модель математической подготовки инженеров/ Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. – № 11. – С. 5-10.

6. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Чебаков Д.А. Конструирование электронных интерактивных курсов в цифровой образовательной среде NOMOTEX/ Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.А. Чебаков // Дневники науки 2019 .- № 11

7. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Зубарев К. М., Алесин А.В., Иванова Т.Л. Автоматизация проверки математических заданий по курсу «Аналитическая геометрия» в системе Nomotex / Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения: Сборник трудов Международного форума, Москва, 28–29 ноября 2019 года. – Москва:

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), 2020. – С. 206-208.

8. Егоркина Е.Б., Иванов М.Н., Иванов Н.Н., Учеваткина Н.В. Формирование научноисследовательских компетенций студентов с применением дистанционных образовательных технологий и электронного обучения // Сб. матер. XI Всерос. науч.-практ.конф. «Цифровые технологии в образовании, науке, обществе». Петрозаводск, 2017. С. 52–55.

9. Зверева Ю.С. Информатизация образования [Электронный ресурс] // Молодой ученый. – 2016.–№6.3. – С.23-26. – URL: https://moluch.ru/archive/110/27234.

10. Китова Е.Т., Скибицкий Э.Г. Информационно-образовательная среда вуза – инструментарий повышения уровня подготовки студентов/ Е.Т. Китова, Э.Г. Скибицкий // Инновации в образовании. – 2016. –№ 10. –С. 116–125.

11. Онлайн-обучение: как оно меняет структуру образования и экономику образования и экономику университета. Открытая дискуссия Я.И. Кузьминова — М. Карной // Вопросы образования. 2015. № 3. С. 8–43.

12. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2 т. Т. 1. М.: Народное образование, 2005. 553 с.

13. Смолкин А.М. Методы активного обучения: Науч.-метод. пособие. - М.:Высш. шк., 1991. 176 с.

Оригинальность 82%