УДК: 514.8+537.8

DOI 10.51691/2541-8327_2022_11_7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА GRTENSORIII ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. I

Тришин В. Н.
к. ф.-м.н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия

Тришина Н. Е.
к. ф.-м.н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,
Москва, Россия

Аннотация.
В статье рассматриваются примеры использования пакета GRTensorIII для системы компьютерной алгебры Maple в учебных задачах общей теории относительности. Представлены вычисления полей Максвелла, порожденные векторными полями Киллинга в вакуумных пространствах ОТО (полей Папапетру).

Ключевые слова: векторы Киллинга, формы Киллинга, поля Папапетру.

USING THE GRTENSORIII PACKAGE TO STUDY THE BASICS OF GENERAL RELATIVITY

Trishin V. N.
PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Trishina N. E.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia

Abstract.
The article considers examples of using the GRTensorIII package for the Maple computer algebra system in educational problems of general relativity. Calculations of Maxwell fields generated by Killing vector fields in vacuum spaces of general relativity (Papapetrou fields) are presented.
Keywords: Killing vectors, Killing forms, Papapetrou fields.

Пакет GRTensorIII [1] является набором специальных функций для системы компьютерной алгебры Maple, предназначенный для решения задач, возникающих в общей теории относительности. Он даёт удобные средства для работы со стандартными геометрическими объектами, такими как метрика, кривизна, символы Кристоффеля и многими другими.

В данной методической статье мы демонстрируем применение GRTensorIII для вычисления полей Папапетру, называемых также формами Киллинга. Хорошо известно (см., например, [2]), что в вакуумном пространстве-времени ОТО вектор Киллинга является векторным потенциалом для пробного поля Максвелла в этом пространстве.

Действительно, пусть метрика $g_{\mu\nu}$ пространства-времени допускает симметрию, которая характеризуется векторным полем Киллинга K^{μ} , удовлетворяющем уравнению Киллинга

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu) = 0, \qquad (1)$$

где символ ∇_μ означает ковариантную производную со связностью Леви-Чивита. Тогда для пустого пространства-времени, для которого выполняются уравнения Эйнштейна $R_{\mu\nu} = 0$, вектор Киллинга K^μ является также векторным потенциалом для пробного электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}K_{\nu]} = \nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu, \qquad (2)$$

удовлетворяющего (в вакуумном пространстве-времени) уравнениям Максвелла:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \qquad (3)$$

Поле $F_{\mu\nu}$ называют поле Папапетру, также используется название форма Киллинга. Мы используем возможности пакета GRTensorIII для вычисления этих полей в пространстве-времени с метрикой Керра, которая описывает вращающуюся чёрную дыру.

Пакет GRTensorIII можно подключить в новой сессии Maple с помощью команды

```
> with(grtensor);
```

Для загрузки (предустановленной) метрики Керра используем команду

```
> qload(kerr);
```

$$ds^2 = (-1 + \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2})\, d\, t^2 - \frac{4mar\sin(\theta)^2\, d\, t\, d\phi}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2} + \frac{(r^2 + a^2\cos(\theta)^2)\, d\, r^2}{a^2 - 2mr + r^2}$$

$$+(r^2 + a^2\cos(\theta)^2)\, d\theta^2 + \sin(\theta)^2(r^2 + a^2 + \frac{2mr\, a^2\sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2})\, d\phi^2$$

Она определяет пространство-время с метрикой Керра в координатах Буайе-Линдквиста (t, r, θ, ϕ).

Проверим, что эта метрика удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор кривизны Риччи. Для вычисления (и упрощения полученного выражения) используем команду *grcalcalter*, и команду *grdisplay* для вывода результата:

> grcalcalter(R(dn,dn),1): grdisplay(_);

$$R_{ab} = All\ components\ are\ zero$$

Как хорошо известно [3], метрика Керра обладает двумя независимыми векторами Киллинга. Векторное поле $K^{\mu} = \frac{\partial}{\partial t}$ соответствует условию стационарности, а поле $V^{\mu} = \frac{\partial}{\partial \phi}$ описывает аксиальную симметрию решения.

Определим первое поле Киллинга командой *grdef* и используем команду *grcalcd* для его вычисления и вывода результата на экран:

> grdef(`K{^a} := kdelta{^a $t}`): grcalcd(K(up)):

$$K^{a} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Для нахождения ковариантных компонент K_{μ} используем

> grcalcalter(K(dn),1): grdisplay(_);

$$K_a = \left[-\frac{a^2\cos(\theta)^2 - 2mr + r^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{2mar\sin(\theta)^2}{r^2 + a^2\cos(\theta)^2}\right]$$

Проверим, что поле K^{μ} удовлетворяет уравнению Киллинга:

> grcalcd(KillingTest[K]);

$$Killing\ Test\ [K] = \ a\ Killing\ vector\ .$$

Рассматривая вектор Киллинга как векторный потенциал, введем тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}K_{\nu]}$ командой

> grdef(`F{[a b]}:=2*K{[b ; a]}`):

и вычислим его компоненты в координатах (t, r, θ, ϕ):

> grcalcalter(F(dn,dn),1): grdisplay(_);

$$F_{ab}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2m(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & -\frac{4mr\,a^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & 0 \\ \frac{2m(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & 0 & 0 & -\frac{2ma\sin(\theta)^2(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} \\ \frac{4mr\,a^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & 0 & 0 & -\frac{4mar\sin(\theta)\cos(\theta)(a^2+r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} \\ 0 & \frac{2ma\sin(\theta)^2(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & \frac{4mar\sin(\theta)\cos(\theta)(a^2+r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Проверим, что полученный тензор удовлетворяет уравнениям Максвелла $\nabla^{\mu}F_{\mu\nu}=0$:

```
> grdef(`j{^a}:=F{^a^b;b}`): grcalcalter(j(up),1): grdisplay(_);
```

$$j^a = All\ components\ are\ zero$$

Вычислим также инварианты электромагнитного поля $I=F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $J={}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, где введен дуальный тензор ${}^*F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$:

```
> grdef(`Fstar{a b}:=LevC{a b c d}*F{^c^d}`):
> grdef(`I:=F{a b}*F{^a^b}`): grdef(`J:=F{a b}*Fstar{^a^b}`):
> grcalc(I): gralter(_,1): grdisplay(_);
> grcalc(J): gralter(_,1,2,10): grdisplay(_);
```

$$I=-\frac{8m^2(a^2\cos(\theta)^2+2\cos(\theta)ar-r^2)(a^2\cos(\theta)^2-2\cos(\theta)ar-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^4}$$

$$J=-\frac{64m^2ar\cos(\theta)(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^4}$$

Инварианты отличны от нуля, следовательно полученное электромагнитное поле не является алгебраически специальным (вырожденным).

Легко видеть, что в предельном случае плоского пространства-времени Минковского ($a=0,\ m=0$), тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ обращается в ноль, поэтому вектор Киллинга $K^{\mu}=\frac{\partial}{\partial t}$ не дает нетривиальных решений уравнений Максвелла в пространстве Минковского.

Рассмотрим теперь второе векторное поле Киллинга $V^{\mu}=\frac{\partial}{\partial\phi}$, соответствующее аксиальной симметрии метрики Керра.

```
> grdef(`V{^a} := kdelta{^a $phi}`): grcalcd(V(up)):
```

$$V^a = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1].$$

Его ковариантные компоненты

> grcalc(V(dn)): gralter(_,1): grdisplay(_);

$$V_a = \left[-\frac{2mar\sin(\theta)^2}{r^2+a^2\cos(\theta)^2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{(a^2(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^2+(2mr+r^2)a^2+r^4)\sin(\theta)^2}{r^2+a^2\cos(\theta)^2}\right].$$

Поле V^μ удовлетворяет уравнению Киллинга:

> grcalcd(KillingTest[V]);

$$Killing\ Test\ [V] = \ a\ Killing\ vector\ .$$

Вычислим тензор электромагнитного поля $f_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}V_{\nu]}$:

> grdef(`f{[a b]}:=2*V{[b ; a]}`): grcalcalter(f(dn,dn),1): grdisplay(_);

Его ненулевые компоненты

$$f_{tr} = \frac{2ma\sin(\theta)^2(a^2\cos(\theta)^2-r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2},$$

$$f_{t\theta} = \frac{4mar\sin(\theta)\cos(\theta)(a^2+r^2)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2},$$

$$f_{r\phi} = -\frac{2\left(a^4(m-r)\cos(\theta)^4-\left(a^2m+r^2(m+2r)\right)a^2\cos(\theta)^2+m\,r^2a^2-r^5\right)\sin(\theta)^2}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2},$$

$$f_{\theta\phi} = \frac{2\cos(\theta)(a^4(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^4+2a^2r^2(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^2+2a^4mr+(4m\,r^3+r^4)a^2+r^6)\sin(\theta)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^2}.$$

Проверим, что $f_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла:

> grdef(`j{^a}:=f{^a^b;b}`): grcalc(j(up)): gralter(_,1): grdisplay(_);

$$j^a = All\ components\ are\ zero$$

Инварианты электромагнитного поля $I = f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ и $J =^* f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$:

> grdef(`fstar{a b}:=LevC{a b c d}*f{^c^d}`):

> grdef(`I:=f{a b}*f{^a^b}`): grdef(`J:=f{a b}*fstar{^a^b}`):

> grcalc(I): gralter(_,1): grdisplay(_);

> grcalc(J): gralter(_,1,2,10): grdisplay(_);

$$I =$$

$$\frac{(8a^8-8m^2a^6)\cos(\theta)^8+16\left((m-2r)a^2+3m\,r^2\right)a^4(m-r)\cos(\theta)^6-8a^2\left(m(m-6r)a^4+\left(12m^2r^2-2m\,r^3-6r^4\right)a^2+m\,r^4(m+4r)\right)\cos(\theta)^4}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^4}+$$

$$+\frac{48(a^2m+r^3)\left(\left(m+\frac{2r}{3}\right)a^2+\frac{m\,r^2}{3}\right)r^2cos(\theta)^2-8\left(m(m+2r)a^2+2m\,r^3-r^4\right)r^4}{(r^2+a^2cos(\theta)^2)^4}$$

$$J=-\frac{32\cos(\theta)ma\sqrt{1-\cos(\theta)^2}\left(a^4(a^2-2mr+r^2)\cos(\theta)^4+2a^2r(a^2+r^2)(m-r)\cos(\theta)^2-2a^2m\,r^3-3a^2r^4-3r^6\right)\sin(\theta)}{(r^2+a^2\cos(\theta)^2)^4}$$

Это поле также является невырожденным.

Из полученного выражения для компонент поля $f_{\mu\nu}$ видно, что в плоском пространстве-времени вектор Киллинга $V^\mu=\frac{\partial}{\partial\phi}$ определяет нетривиальное решение уравнений Максвелла. Действительно, при подстановке $a=0$ в тензор электромагнитного поля получим:

```
> grmap (a(dn,dn), subs, a=0, 'x' ): gralter(_,1): grdisplay(_);
```

$$f_{ab}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)^2r\\ 0 & 0 & 0 & 2\sin(\theta)r^2\cos(\theta)\\ 0 & -2\sin(\theta)^2r & -2\sin(\theta)r^2\cos(\theta) & 0\end{bmatrix}$$

Переходя в декартовы координаты (t,x,y,z) с помощью матрицы

```
> grdef(`Lambda{^a b}:=
sin(theta)*cos(phi)*kdelta{^a $r}*kdelta{$r b} + r*cos(theta)*cos(phi)*kdelta{^a $r}*kdelta{$theta b} - r*sin(theta)*sin(phi)*kdelta{^a $r}*kdelta{$phi b} + sin(theta)*sin(phi)*kdelta{^a $theta}*kdelta{$r b} + r*cos(theta)*sin(phi)*kdelta{^a $theta}*kdelta{$theta b} + r*sin(theta)*cos(phi)*kdelta{^a $theta}*kdelta{$phi b} + cos(theta)*kdelta{^a $phi}*kdelta{$r b} - r*sin(theta)*kdelta{^a $phi}*kdelta{$theta b} + kdelta{^a $t}*kdelta{$t b}`);
```

$$\Lambda_b^a=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi)\\ 0 & \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi)\\ 0 & \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0\end{bmatrix},$$

получим в декартовых координатах следующие контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля:

```
> grdef(`fdec{^a ^b}:=Lambda{^a c}*Lambda{^b d}*f{^c ^d}`);
> gralter(_,1,2): grcalcd(fdec(up, up));
```

$$fdec^{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Этот тензор описывает однородное постоянное магнитное поле, силовые линии которого параллельны оси z.

Таким образом, мы видим, что использование современных средств компьютерной алгебры, в частности Maple+GRTensorIII, позволяет существенно упростить и ускорить вычисления в задачах общей теории относительности, а также избежать неизбежных при "ручных" вычислениях ошибок.

Библиографический список

1. GRTensorIII. URL: http://grtensor.phy.queensu.ca/

2. Wald R.M. General relativity. The University of Chicago Press, 1984

3. Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр: В 2-х ч. - М.: Мир, 1986.

Оригинальность 82%