УДК 512.552

DOI 10.51691/2541-8327_2022_11_4

СТАНДАРТНЫЕ ТОЖДЕСТВА АЛГЕБР ГЕККЕ ГРУПП ДИЭДРА

Киреева Е.А.

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Щиголев В.В.

доктор физико-математических наук, профессор

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,

Москва, Россия

Аннотация

В статье рассматривается алгебра Гекке H_n для группы диэдра D_n, состоящей из n элементов (включая случай $n = \infty$). Изучение этой алгебры важно как само по себе, так и с точки зрения её фундаментальной роли при изучении алгебр Гекке для произвольных групп Кокстера, например в вопросах их категорификации при помощи неразложимых бимодулей.

Мы рассматриваем алгебры H_n с точки зрения выполнения в них полиномиальных тождеств. Кольца, удовлетворяющие полиномиальным тождествам, представляют собой особый класс колец, который можно рассматривать как далеко идущее обобщение класса коммутативных колец. Кроме последних к ним также

относятся, например, кольца матриц над коммутативными кольцами и алгебры Грассмана.

Мы доказываем, что алгебра H_n всегда удовлетворяет стандартному тождеству порядка 4, то есть, тождеству

$$x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_3 - x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 + x_1x_4x_2x_3 - x_1x_4x_3x_2 - x_2x_1x_3x_4 + x_2x_1x_4x_3 + x_2x_3x_1x_4 - x_2x_3x_4x_1 - x_2x_4x_1x_3 + x_2x_4x_3x_1 + x_3x_1x_2x_4 - x_3x_1x_4x_2 - x_3x_2x_1x_4 + x_3x_2x_4x_1 + x_3x_4x_1x_2 - x_3x_4x_2x_1 - x_4x_1x_2x_3 + x_4x_1x_3x_2 + x_4x_2x_1x_3 - x_4x_2x_3x_1 - x_4x_3x_1x_2 + x_4x_3x_2x_1 \equiv 0.$$

Ключевые слова: группа диэдра, алгебра Гекке, полиномиальное тождество, стандартное тождество, групповая алгебра.

STANDARD IDENTITIES FOR THE HECKE ALGEBRAS OF THE DIHEDRAL GROUPS

Kireeva E.A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Shchigolev V.V.

PhD, Professor,

Financial University under the Government of the Russian Federation,

Moscow, Russia

Abstract

In this article, we consider the Hecke algebra H_n for the dihedral group D_n consisting of n elements (including the case $n = \infty$). The study of this algebra is important both in itself and from the point of view of its fundamental role in the study of Hecke algebras for arbitrary Coxeter groups, for example, in questions of their categorification, using indecomposable bimodules.

We consider the algebras H_n from the point of view of the polynomial identities that they satisfy. Rings satisfying polynomial identities are a special class of rings that can be viewed as a far-reaching generalization of the class of commutative rings. In addition to the latter, they also include, for example, the matrix rings over commutative rings and the Grassmann algebras.

We prove that the algebra H_n always satisfies the standard identity of order 4, that is, the identity

$$x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_4x_3 - x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 + x_1x_4x_2x_3 - x_1x_4x_3x_2 - x_2x_1x_3x_4 + x_2x_1x_4x_3 + x_2x_3x_1x_4 - x_2x_3x_4x_1 - x_2x_4x_1x_3 + x_2x_4x_3x_1 + x_3x_1x_2x_4 - x_3x_1x_4x_2 - x_3x_2x_1x_4 + x_3x_2x_4x_1 + x_3x_4x_1x_2 - x_3x_4x_2x_1 - x_4x_1x_2x_3 + x_4x_1x_3x_2 + x_4x_2x_1x_3 - x_4x_2x_3x_1 - x_4x_3x_1x_2 + x_4x_3x_2x_1 \equiv 0.$$

Keywords: Dihedral group; Hecke algebra; polynomial identity, standard identity, group algebra.

1. Введение

В статье рассматривается группа диэдра D_n мощности n, включая случай $n = \infty$. Данная группа имеет следующее представление:$D_n = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1, (st)^{n/2} = 1\rangle$, если n конечно, и $D_n = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = 1\rangle$, если $n = \infty$. Из этого представления видно, что D_n является группой Кокстера и, следовательно, мы можем рассмотреть её алгебру Гекке

$$H_n = \bigoplus_{x \in D_n} \mathbb{Z}[v, v^{-1}]T_x,$$

где порождающие T_x удовлетворяют следующим правилам умножения:

- $T_x^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_x$, если $\ell(x) = 1$;
- $T_x T_y = T_{xy}$, если $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$.

Здесь и далее через ℓ обозначается функция длины на группе D_n. Заметим, что алгебры Гекке для групп диэдра играют важную роль при изучении алгебр Гекке для произвольных групп Кокстера и связанных с ними вопросов. Например, В. Зёргель рассматривал частный случай группы диэдра в своём доказательстве теоремы категорификации для алгебры Гекке с помощью бимодулей над полиномиальными кольцами, см. [6, §4]. С другой стороны, алгебры Гекке для групп диэдра интересны и сами по себе [2], [5].

В этой статье мы рассмотрим алгебры H_n с точки зрения выполнения в них полиномиальных тождеств. Более точно, пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — целочисленный многочлен от некоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_m$. Для произвольных элементов кольца $r_1, \dots, r_m \in R$ результат действия подстановки $x_1 \mapsto r_1, \ldots, x_m \mapsto r_m$ на этот многочлен обозначим через $f(r_1, \dots, r_m)$. Кольцо R удовлетворяет тождеству $f \equiv 0$, если $f(r_1, \dots, r_m) = 0$ для любых $r_1, \dots, r_m \in R$.

Главной целью этой статьи является изучение выполнения на алгебрах H_n стандартного тождества порядка m:

$$\mathrm{St}_m(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn} \sigma\, x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)},$$

где S_m — симметрическая группа порядка m, а $\operatorname{sgn}: S_m \to \{-1,1\}$ — функция знака.

Хорошо известно, что алгебры Гекке изоморфны групповым алгебрам при некотором расширении кольца скаляров. Эти групповые алгебры, однако, могут быть трудны для изучения либо из-за их колец скаляров, либо из-за того, что рассматриваемая группа диэдра бесконечна. Мы сводим упомянутую выше основную проблему к случаю рациональной групповой алгебры конечной группы диэдра и доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Любая алгебра H_n удовлетворяет стандартному тождеству* $\mathrm{St}_4 \equiv 0$.

Естественно задаться вопросом, удовлетворяют ли алгебры Гекке H_n групп диэдра тождеству St_n при $n < 4$. Общий ответ «нет», за исключением очень маленьких групп.

2. Алгебры Гекке как алгебры с полиномиальными тождествами

Для любого конечного n обозначим через $\pi_n: \mathbb{Q}D_\infty \to \mathbb{Q}D_n$ отображение, которое переводит порождающие s и t группы D_∞ в соответствующие порождающие группы D_n. Рассмотрим следующее подмножество группы D_∞:

$$D_\infty^n = \{x \in D_\infty \mid \ell(x) < n/2 \text{ или } \ell(sx) < \ell(x) = n/2\}.$$

Лемма 1. *Отображение π_n биективно отображает D_∞^n на D_n.*

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $y \in D$. Сначала рассмотрим случай, когда $\ell(y) < n/2$. Тогда элемент y имеет одно из следующих приведённых представлений:

$$y = sts \cdots p \text{ или } y = tst \cdots q,$$

где $p = t$, $q = s$, если $\ell(y)$ чётное, и $p = s$, $q = t$, если $\ell(y)$ нечётное. Рассматривая в формулах выше s и t как порождающие группы D_∞, мы получаем элемент $x \in D_\infty$. По определению $\pi_n(x) = y$. Кроме того, $\ell(x) = \ell(y) < n/2$. Поэтому $x \in D_\infty^n$.

Теперь рассмотрим случай $\ell(y) = n/2$. В этом случае существуют два приведённых представления элемента y: одно из них начинается с порождающей s, а другое с порождающей t. Мы выберем первое из них и определим элемент $x \in D_\infty$ аналогично случаю, рассмотренному выше. Мы получаем $\pi_n(x) = y$ и $\ell(x) = \ell(y) = n/2$. Кроме того, $\ell(sx) < \ell(x)$ в силу выбора приведённого представления для x. Таким образом $x \in D_\infty^n$. Этим мы доказали сюръективность.

Инъективность следует из того факта, что все элементы $\pi_n(x)$ для $x \in D_\infty^n$ по определению имеют приведённые представления не переводимые друг в друга единственным для группы D_n соотношением кос

$$sts \cdots p = tst \cdots q,$$

содержащим $n/2$ сомножителей в правой и левой частях. ∎

Следствие 1. *Для любого $x \in D_\infty$ существует единственный $\tilde{x} \in D_\infty^n$ такой, что $\pi_n(x) = \pi_n(\tilde{x})$. При этом $\tilde{x} = x$ для $x \in D_\infty^n$.*

Лемма 2. *Ядро отображения π_n порождено как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ всеми разностями $x - \tilde{x}$, где $x \in D_\infty \backslash D_\infty^n$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $x - \tilde{x} \in \ker \pi_n$ в силу равенства $\pi_n(x) = \pi_n(\tilde{x})$. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \ker\pi_n$ и представим его в виде

$$f = \sum_{x \in D_\infty} c_x \, x,$$

где $c_x \in \mathbb{Q}$ и лишь конечное количество этих коэффициентов отлично от нуля. Получаем

$$f = \sum_{x \in D_\infty} c_x \, (x - \tilde{x}) + \sum_{x \in D_\infty} c_x \, \tilde{x} = \sum_{x \in D_\infty \backslash D_\infty^n} c_x \, (x - \tilde{x}) + \sum_{x \in D_\infty} c_x \, \tilde{x}.$$

Последнее слагаемое, очевидно, принадлежи ядру π_n. Запишем его в виде

$$\sum_{x\in D_\infty} c_x\,\tilde{x} = \sum_{y\in D_\infty^n} d_y\,y$$

для соответствующих $d_y \in \mathbb{Q}$. Применяя π_n, получаем

$$\sum_{y\in D_\infty^n} d_y\,\pi_n(y) = 0.$$

Из леммы 1 следует, что элементы $\pi_n(y)$ в этой сумме попарно различны. Следовательно, $d_y = 0$ для всех $y \in D_\infty^n$. ▯

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\mathbb{F}$ поле рациональных дробей $\mathbb{Q}(v)$.

Сначала предположим, что n конечно. Согласно теореме 3.1 из статьи [4] мы получаем

$$H_n \bigotimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathbb{F} \cong \mathbb{F}D_n.$$

Точные формулы этого изоморфизма приведены в работе [2]. Групповая алгебра справа порождается как $\mathbb{F}$-пространство подалгеброй $\mathbb{Q}D_n$. Последняя алгебра удовлетворяет тождеству St_4, что следует из теоремы 1 из работы [3] и теоремы Амицура-Левицкого [1]. Таким образом, кольцо $\mathbb{F}D_n$ его подкольцо H_n тоже удовлетворяют этому тождеству.

Рассмотрим теперь случай $n = \infty$. В этом случае существует изоморфизм

$$\mathbb{F}D_\infty \xrightarrow{\sim} H_\infty \bigotimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathbb{F}$$

такой, что

$$x \mapsto \frac{1-v^{-2}}{1+v^{-2}} T_e \otimes 1 + \frac{2}{1+v^{-2}} T_x \otimes 1$$

для $x = s$ и $x = t$, см. [5, §2].

Как и в случае конечного n, достаточно доказать, что групповая алгебра $\mathbb{Q}D_\infty$ удовлетворяет тождеству St_4. Таким образом, мы должны доказать, что

$$\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0$$

для любых $w_1, w_2, w_3, w_4 \in D_\infty$. Выберем произвольное $n > 2\ell(w_1) + 2\ell(w_2) + 2\ell(w_3) + 2\ell(w_4)$ и рассмотрим гомоморфизм π_n, определённый выше. По первой части доказательства получаем

$$\pi_n\big(\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4)\big) = \mathrm{St}_4\big(\pi_n(w_1), \pi_n(w_2), \pi_n(w_3), \pi_n(w_4)\big) = 0.$$

Отсюда $\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \ker \pi_n$. По лемме 2 мы получаем представление

$$\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4) = \sum_{x \in D_\infty \setminus D_\infty^n} q_x\,(x - \tilde{x})$$

для некоторых $q_x \in \mathbb{Q}$. Так как $\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{Q}D_\infty^n$, то

$$\sum_{x \in D_\infty \setminus D_\infty^n} q_x\, x \in \mathbb{Q}D_\infty^n.$$

Очевидно, что это возможно только в том случае, если $q_x = 0$ для всех $x \in D_\infty \setminus D_\infty^n$. Отсюда $\mathrm{St}_4(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0$. □

Библиографический список

[1] Amitsur A.S., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc., v. 1, 1950, P. 449–463.

[2] Fakiolas A.P. The Lusztig isomorphism for Hecke Algebras of Dihedral Type // J. Algebra, v. 126, 1989, P. 466–492.

[3] Giraldo Vergara C.R., Brochero Martínez F.E. Wedderburn decomposition of some special rational group algebras // Lect. Mat. v. 23, № 2, 2002, P. 99–106.

[4] G.Lusztig, On a theorem of Benson and Curtis // J. Algebra, v. 71**,** 1981, P. 490–498.

[5] B.Okun, R. Scott, The Atiyah conjecture for the Hecke algebra of the infinite dihedral group // Groups Geom. Dyn. v. 8, № 4, 2014, P. 1161–1194.

[6] W.Soergel, Kazhdan-Lusztig Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen // J. Inst. Math. Jussieu, v. 6, № 3, July 2007, P. 501–525.

Оригинальность 84%