УДК 519.85

ПРИМЕРЫ СОКРАЩЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Киселев В.В.

к.т.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,

Москва, Россия

Аннотация

В данной статье рассматриваются простые примеры сокращения количества вычислений, основанные на использовании понятий Λ-оптимальности и Λ-монотонности. Примеры являются иллюстрациями общего подхода к решению задач большой размерности и работы с моделями сложных систем, основанном на выделении недоминируемых вариантов.

Ключевые слова: математическое программирование, оптимальность по Парето, Λ-оптимальность, Λ-монотонность, сложные технические системы, большая размерность.

EXAMPLES OF REDUCING THE NUMBER OF CALCULATIONS IN THE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING

***Kiselev V. V*.**

Ph. D., associate Professor, Bauman

Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Annotation

This article discusses simple examples of reducing the number of calculations based on the use of the concepts of Λ-optimality and Λ-monotonicity. The examples illustrate a general approach to solving large-dimensional problems and working with models of complex systems, based on the allocation of non-dominant options.

Keywords: mathematical programming, Pareto optimality, Λ-optimality, Λ-monotonicity, complex technical systems, high dimension.

Поиск оптимальных решений в некоторых задачах экономики и техники является сложным многоэтапным процессом, в котором используются достаточно большие программные модули. Даже при использовании современной вычислительной техники время вычислений, необходимое для получения оптимального варианта с заданной точностью может быть очень большим. В некоторых случаях, при наличии известных свойств целевой функции, основную задачу оптимизации можно разбить на подзадачи и сократить количество вычислений. В работе [3] для снижения размерности задачи и сокращения количества вычислений используется свойство монотонности целевой функции и понятие оптимальности по Парето.

Пусть F(x) – глобальный критерий эффективности сложной технической или экономической системы, который зависит от параметров $x \in X \subset R^N$ и этот критерий желательно максимизировать, т.е. решается задача поиска вектора

$$x^0 \in \operatorname{Arg}\max F(x),\ x \in X. \qquad (1)$$

Если рассматриваемая система простая, то для поиска оптимального решения можно использовать обычные методы математического программирования, но для сложных систем такой подход не приводит к успеху в силу большой размерности задачи и значительного времени вычисления глобального критерия эффективности. Для решения задачи (1) Краснощеков П.С., Морозов В.В. и Федоров В.В. [3] предложили выделять частные критерии эффективности $u_i(x), i = \overline{1, M}$ и рассматривать класс монотонных функций

$$F(x) = \Phi(u(x)),$$

таких, что для любых $x^1, x^2 \in X$ из условия $u(x^1) \geq u(x^2)$ следует $\Phi(u(x^1)) \geq \Phi(u(x^2))$. Данный подход позволяет во многих случаях сократить количество вычислений, поскольку задача (1) заменяется задачей поиска оптимального вектора только на множестве Парето-оптимальных решений. Поскольку множество Парето-оптимальных решений часто значительно меньше множества X, то количество узлов δ-сетки на множестве Парето-оптимальных решений значительно меньше количества узлов δ-сетки на X. Если учесть, что время вычислений значения функции F(x) большое, то такой подход позволяет значительно сократить общее время поиска оптимального варианта и получить этот вариант в заданные сроки. Другие подходы к решению задач большой размерности и декомпозиции исходной модели приведены в работах [4-8].

В данной работе используется свойство Λ-монотонности глобального критерия, которое обобщает понятие монотонности и понятие Λ-оптимальности [9], которое обобщает понятие оптимальности по Парето.

Для сложных систем, при решении задачи (1), часто единственно возможным методом решения является метод перебора узлов δ-сетки, построенной на множестве допустимых значений X. Если функции F(x) или $\Phi(u(x))$ Λ-монотонны, то для решения задачи (1) достаточно перебрать только узлы принадлежащие множеству недоминируемых решений. Формальные условия проверки Λ-монотонности $\Phi(u(x))$ приведены в работе [1], иногда Λ-монотонность можно установить из общих свойств постановки экономической или технической задачи. Например, если Φ – стоимость всей системы, а u_i - стоимость i-ой подсистемы, то $\Phi(u)$ является монотонной функцией.

Далее будем полагать, что множество допустимых значений X есть некоторое связное и ограниченное подмножество в R^N.

Определение. Непрерывная функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется возрастающей по направлению S≠0, если для любой точки $x^0 \in X$ выполняется неравенство $f(y) > f(x)$, если $y = x^0 + tS, y \in X, t > 0.$

Определение. Непрерывная функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется неубывающей по направлению S≠0, если для любой точки $x^0 \in X$ выполняется неравенство $f(y) \geq f(x)$, если $y = x^0 + tS, y \in X, t > 0.$

Аналогично определяются понятия функций убывающей и невозрастающей по направлению.

Определение. Если функция f(x) является возрастающей на множестве X по любому направлению S, принадлежащему конусу Λ, то f(x) называется Λ-возрастающей функцией на X.

Определение. Точка $x \in X$ называется Λ-оптимальной, если для всякого $y \in X$ такого, что $y - x \in \Lambda$ следует y=x.

Множество всех Λ-оптимальных точек на X будем обозначать X_Λ.

Пусть на множестве X задана вектор-функция $u(x), x \in X, u \in R^M$.

Определение. Точка $x \in X$ называется Λ-оптимальной, если для всякого $y \in X$ такого, что $u(y) - u(x) \in \Lambda$ следует $u(y) = u(x)$.

Множество Λ-оптимальных точек на $U = u(X)$ будем обозначать $U_\Lambda, U_\Lambda = u(X_\Lambda)$.

Пример 1. Функция

$$f(x_1, x_2) = x_2 - \sin x_1,$$

является возрастающей по направлению $e = (0,1)$, т.е. это Λ-возрастающая функция для конуса

$$\Lambda = \{x \mid x = ct, c = (0,1), t \geq 0\}.$$

Если

$$X=[-a,a]\times[-b,b],$$

то на данном множестве можно определить δ-сетку следующим образом. Отрезок [-a,a] разделим на n частей, отрезок [-b,b] разделим на m частей. Множеством Λ-оптимальных вариантов является отрезок соединяющий точки (-a,a) и (a,b). Если использовать метод перебора, то в данном случае вместо перебора всех n·m возможно выполнить расчеты только для n Λ-оптимальных точек.

Пример 2. Задана целевая функция

$$f(x)=-x_1^2-(x_2-4)^2\to\max$$

и множество допустимых значений

$$X=\{x\,|\,5\le x_1\le 8, 0\le x_2\le 8\}.$$

На данном множестве

$$\nabla f(x)\in D=[-16,10]\times[-8,8],$$

конус Λ определяется условиями

$$\Lambda=\{x\,|(x,c)\ge 0, c\in D\},$$

что эквивалентно

$$\Lambda=\{x\,|(x,c^i)\ge 0, i=1,2, c^1=(-10,-8), c^2=(-10,8)\}.$$

Λ-оптимальным является отрезок

$$L=\{x\,|\,x_1=5, 0\le x_2\le 8\}.$$

Если разбить отрезок [0,8] на m частей, а отрезок [5,8] на n частей, то общее число узлов сетки равно n·m, а количество Λ-оптимальных узлов равно m.

Пример 3. Задана целевая функция

$$f(x)=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$$

и множество допустимых значений

$$X=\{x\,|\,x_1,x_2\ge 0, x_1+x_2\le 8\}.$$

Здесь f(x) – неубывающая функция, т.е. из условия $x^1 \geq x^2$ следует $f(x^1) \geq f(x^2)$.

В данном случае конусом Λ является положительный ортант R^+ и множество Λ-оптимальных точек совпадает с множеством точек оптимальных по Парето. Все Парето оптимальные точки принадлежат отрезку

$$L = \{z \mid z = \alpha A + (1-\alpha)B, A = (0,8), B = (8,0), \alpha \in [0,1]\}.$$

Если отрезки изменения переменных разбить на n частей, то общее количество узлов сетки равно $s \approx \frac{1}{2}n^2$, а количество Λ-оптимальных точек $l \approx n\sqrt{2}$.

Пример 4. Задана целевая функция

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

и множество допустимых значений

$$X = \{x \mid x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 8, x_1 + 3x_2 \leq 18, 3x_1 + x_2 \leq 18\}.$$

В данном случае множество допустимых значений – выпуклый многогранник с вершинами A=(0,6), B=(3,5), C=(5,3), D=(6,0), E=(3,0), F=(0,3).

Ранее было отмечено, что функция f(x) – неубывающая. Множество Парето-оптимальных решений состоит из трех отрезков [A,B], [B,C], [C,D].

$$\nabla f(x) \in D = [12,32] \times [6,26].$$

Конус Λ определяется условиями

$$\Lambda = \{x \mid (x, c^i) \geq 0, i = 1,2, c^1 = (12,26), c^2 = (32,6)\}.$$

По построению конус Λ содержит R^+, это означает, что $X_\Lambda \subset X_\Pi$. Проверим условия Λ-оптимальности для Парето-оптимальных точек A, B, C, D.

$$(C^2, A) = 36, (C^2, B) = 126, \ (C^2, C) = 178, \ (C^2, D) = 192.$$

Отсюда следует что только точка D является Λ-оптимальной. В данном случае не нужно строить сетку на X, оптимальной будет только одна точка.

Приведенные выше примеры показывают, что даже в задачах небольшой размерности можно значительно сократить количество вычислений, если использовать понятие Λ-оптимальности в методах, которые были предложены в работе [3]. В задачах большой размерности и большом времени вычислений значения целевой функции применение рассматриваемых в статье подходов будет эффективнее. Другие методы построения Λ-оптимальных решений приведены в [2].

Библиографический список:

1. Kiselev V.V. Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems // JOURNAL OF MASHEMATICAL SCIENCE. - 2016.- Volume 216. - Number 5. –pp. 667-673.

2. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов.- М.: КНОРУС, 2020.

3. Краснощёков П.С., Морозов В.В., В.В. Фёдоров. Декомпозиция в задачах проектирования. //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1979. - №2.

4. Краснощеков П.С. Оптимизация в автоматизированном проектировании. - М.: МАКС Пресс, 2018.

5. Месарович М., Такхара Я. Общая теория систем: математические основы. - М.: МИР, 1978.

6. Морозов В.В, Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. - М.: URSS, 2009.

7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Физматлит, 2007.

8. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности.- М.: Наука, 1981.

9. Yu, P.L. Cone. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Optim. Theory Appl. − 1974. − V. 14. − № 3.

Оригинальность 94%