УДК 371.30

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ РАБОТЫ НАД ЗАДАЧЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОГО КУРСА

Садовников Н.В.

д.п.н., профессор

Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева,

Пенза, Россия

Садовникова Н.М.

преподаватель

Училище олимпийского резерва Пензенской области,

Пенза, Россия

Султанова Г.А.

к.ф.-м.н., преподаватель

Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева,

Пенза, Россия

Аннотация. В математике овладение общими методами решения задач и умение видеть в различных методах решения единую логическую схему намного важнее, чем тщательное изучение мелких частных случаев. Лучше применять один общий метод, даже до некоторой степени нерациональный, чем изучать множество специальных приемов. Знания о задачах и сущности их решения необходимы для того, чтобы процесс решения задач превратился в подлинный метод обучения студентов (курсантов) решению задач, формирования у них общих методов решения задач и научить пользоваться ими в каждом конкретном случае.

Известно, что решение любой задачи можно условно разделить на четыре этапа: анализ условия и цели задачи, поиск способа и составление плана решения задачи, оформление найденного плана решения, анализ результата решения задачи.

В работе показана реализация методики работы над задачей на примере решения конкретной стереометрической задачи. Подробно разобраны все четыре этапа решения. Рисунки, использованные в статье, оформлены авторами.

Ключевые слова: этапы работы над задачей, понимание постановки задачи, поиск плана решения, взгляд назад, осуществление найденного плана решения, эвристические приемы решения задачи.

THE IMPLEMENTATION OF THE METHODOLOGY FOR WORKING ON THE PROBLEM WHEN SOLVING THE STEREOMETRIC PROBLEM OF THE SCHOOL COURSE

Sadovnikov N. V.

Doctor of science, professor

Penza branch of the Military Academy of Material and Technical Support named after Army General A.V. Hrulev,

Penza, Russia

Sadovnikova N. M.

teacher

Olympic Reserve School of the Penza region,

Penza, Russia

Sultanova G. A.

Ph.D., teacher

Penza branch of the Military Academy of Material and Technical Support named after Army General A.V. Hrulev,
Penza, Russia

Abstract. In mathematics, mastering general methods for solving problems and the ability to see a single logical scheme in various methods of solving is much more important than a careful study of small special cases. It is better to apply one general method, even somewhat irrational, than to learn many special techniques. Knowledge about problems and the essence of their solution is necessary in order for the problem solving process to turn into a true method of teaching students (cadets) problem solving, forming common methods for solving problems in them and teaching them how to use them in each specific case.

It is known that the solution of any problem can be conditionally divided into four stages: analysis of the condition and goal of the problem, search for a method and drawing up a plan for solving the problem, formalizing the found solution plan, and analyzing the result of solving the problem.

The paper shows the implementation of the methodology for working on the problem by the example of solving a specific stereometric problem. All four stages of the solution are analyzed in detail. Figures used in the article were designed by the authors.

Keywords: stages of solving the problem, understanding the problem statement, finding a solution plan, looking back, implementation of the found solution plan, Heuristic methods for solving the problem.

Методика работы над задачей представляет собой определенную норму деятельности человека на каждом из четырех общепринятых этапов работы над ней. В реальной практике обучения в зависимости от характера предлагаемой задачи тот или иной этап может опускаться. Чаще всего опускается четвертый этап – анализ решения задачи, при решении стандартных задач обычно не останавливаются на первых двух этапах – понимании постановки задачи и поиске плана её решения. Но, чтобы решение задач не превратилось в самоцель, а стало действенным средством обучения и развития познавательных способностей обучающихся, формирования у них основных приемов мышления, преподавателю следует, по возможности, придерживаться всех четырех этапов, заранее прогнозируя соответствующую деятельность обучаемых на каждом из них [1].

Подробно рассмотрим реализацию известной методики на примере работы над следующей, достаточно сложной для учащихся средней школы, стереометрической задачей: основанием треугольной пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 4 см. Известно также, что SA=SB=$\sqrt{19}$ см., а SC=3 см. Найдите площадь поверхности сферы, описанной около этой пирамиды.

На первом этапе после первичного прочтения текста задачи можно попросить учащихся пересказать его своими словами. Дальнейший анализ содержания задачи происходит в вопросно-ответной форме. Необходимо выяснить:

Каково условие данной задачи? В чем состоит требование задачи?

Как можно по-другому сформулировать утверждение, что около пирамиды описана сфера?

Что тогда можно сказать о расположении центра этой сферы по отношению к вершинам пирамиды?

Построить изображение описанной в условии задачи комбинации геометрических тел, предварительно разобрав:

С чего целесообразнее начинать построение изображения комбинации?

Как построить изображение сферы?

Какое сечение сферы может интересовать нас с точки зрения рассматриваемой задачи?

Каким будет взаимное расположение окружности, являющейся сечением сферы, и треугольника, являющегося основанием пирамиды?

Далее учащиеся с помощью учителя строят изображение рассматриваемой комбинации, поясняя одновременно его особенности (рис. 1). При этом обращается внимание на тот факт, что изображением равностороннего треугольника на проекционной плоскости является произвольный треугольник.

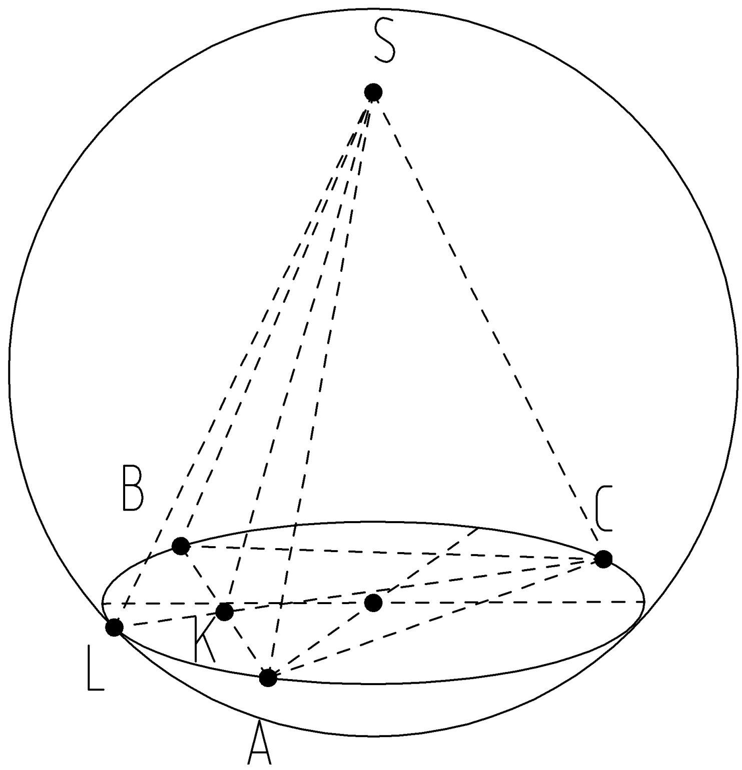

Рис. 1 – Изображение комбинации пирамиды и сферы

Отметим, что одна из особенностей стереометрических задач состоит в том, что еще до краткой записи условия и требования, они являются своего рода задачами на построение изображения фигур, рассматриваемых в условии. Исходя из построенного изображения, кратко записывается условие и требование задачи.

Дано: SABC-пирамида, ABC-равносторонний треугольник, SA=SB=$\sqrt{19}$ см, AB=4см, SC=3см, (O; OS)-сфера, описанная около пирамиды SABC (точка O-не задана). Найти:$S_{сферы}$.

После оформления условия приступим ко второму этапу работы над задачей - поиску плана решения, реализуемого с помощью системы вопросов:

B_1: Какой формулой мы воспользуемся для определения площади поверхности сферы?

B_2: Чему равен радиус сферы в контексте нашей задачи?

B_3: Знаете ли вы местоположение центра сферы – точки O?

B_4: Постараемся его определить. Как центр сферы расположен по отношению к вершинам пирамиды?

B_5: Если, например, взять две вершины пирамиды A и B, то какую фигуру представляет собой множество точек, равноудаленных от A и B?

B_6: Выделим эту точку на построенном нами изображении (точка K). Какие еще из данных точек будут лежать в рассматриваемой плоскости?

B_7:Таким образом, получаем, что точка O лежит в плоскости SKC. Продолжим CK до пересечения со сферой. Точку пересечения обозначим L. Так как L лежит в плоскости LSC, то точка O будет лежать в плоскости LSC. Изобразим сечение сферы плоскостью LSC (рис. 2). Что будет представлять собой это сечение?

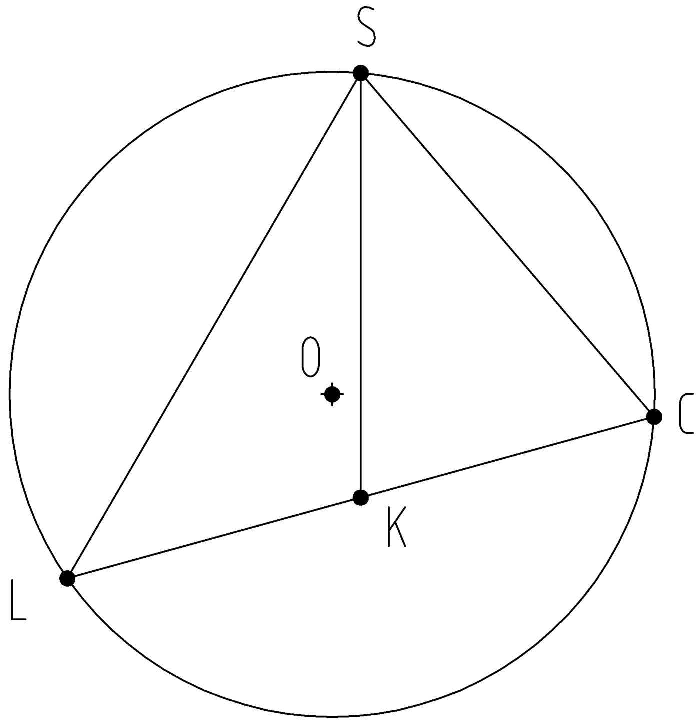

Рис. 2 – Изображение сечения сферы плоскостью

B_8: Как можно найти радиус сферы, исходя из построенного чертежа?

Дальнейшая система вопросов учителя на втором этапе работы над задачей может быть представлена в виде следующей граф–схемы, которую учитель в ходе беседы оформляет на доске, а ученики – в своих тетрадях или черновиках (рис. 3)

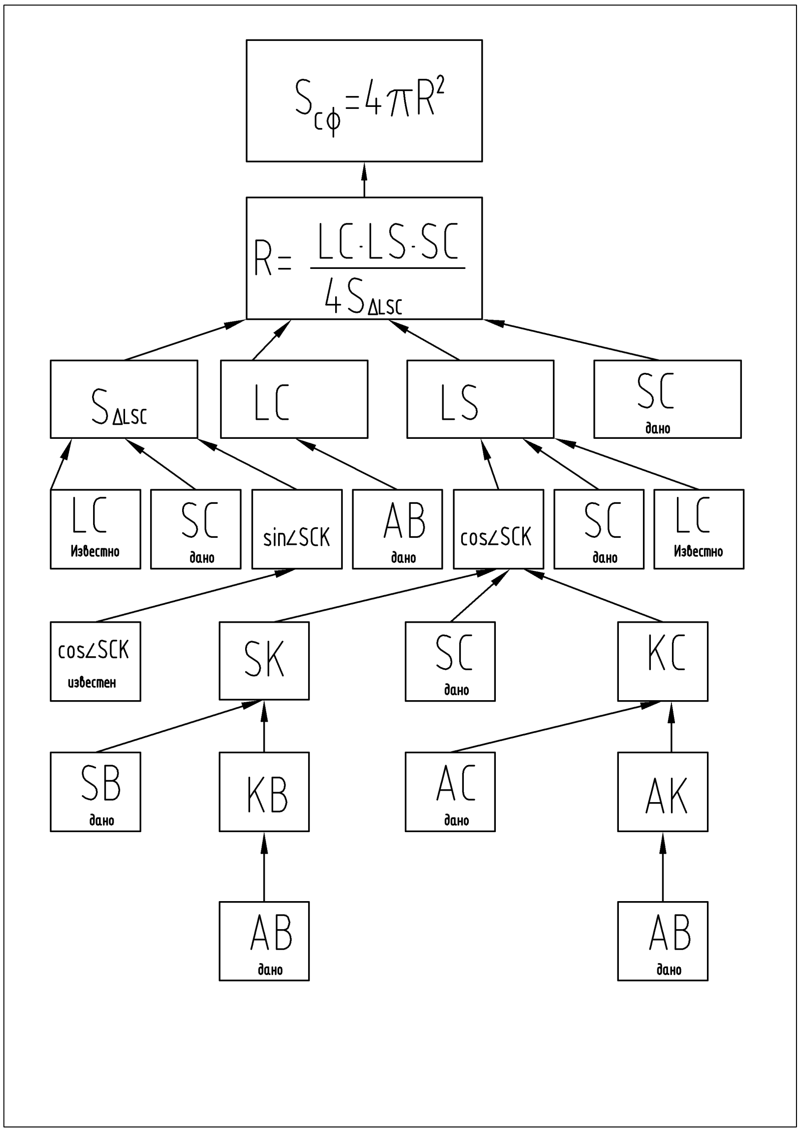

Рис. 3 – Граф-схема

В результате проведенной работы получаем следующий план решения:

1) обосновываем местоположение центра сферы, описанной около пирамиды;

2) для нахождения искомой величины необходимо знать радиус сферы; этот радиус найдем по формуле для нахождения радиуса окружности, описанной около треугольника;

3) все величины, входящие в формулу, находим на основе составленной граф–схемы.

На третьем этапе работы над задачей осуществляем найденный план решения.

Решение

1) Так как сфера описана около пирамиды, то ее центр равноудален от всех вершин пирамиды SABC. В частности, точка O (центр сферы) равноудалена от точек A и B, т.е. AO=OB. Поэтому точка O будет расположена в плоскости, перпендикулярной ребру AB и проходящей через ее середину – точку K. CK$\perp$AB, тогда SK$\perp$AB.

Пусть точка L – точка пересечения CK со сферой. Тогда центр сферы (точка O) лежит в плоскости LSC.

2) Из предыдущего следует, что радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около треугольника LSC. Используя известную формулу из планиметрии, можно записать R=$\dfrac{LS\cdot SC\cdot CL}{4S_{\Delta SLC}}$(*), где LS, SC, CL- стороны треугольника LSC, а $S_{\Delta LSC}$ - площадь этого треугольника.

3) KB=AK=2см (по обоснованию местоположения центра описанной сферы). Тогда SK=$\sqrt{19-4}=\sqrt{15}$ (см) - по теореме Пифагора из прямоугольного Δ SKB, а KC=$\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (см) (из прямоугольного ΔAKC).

Из ΔSKC по теореме косинусов имеем: $SK^{2}=SC^2+KC^2-2SC\cdot KC\cdot\cos\angle SCK$, откуда $\cos\angle SCK=\dfrac{SC^2+KC^2-SK^2}{2\cdot SC\cdot KC}=\dfrac{12+9-15}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3}=\dfrac{6}{12\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Найдем LS как диаметр окружности, описанной около правильного Δ ABC со стороной 4 см:

4=$2r\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $r=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; $LS=2r=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ (см).

LS найдем по теореме косинусов из ΔSLC:

$$LS=\sqrt{9+\frac{64}{3}-2\cdot 3\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{67}{3}}\text{ (см)}$$

Для нахождения площади ΔSLC вычислим $\sin\angle SCK$

$$\sin\angle SCK = \sqrt{1-\cos^2\angle SCK} = \sqrt{1-\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

Тогда $S_{\Delta SLC} = \frac{1}{2}\cdot LC\cdot SC\cdot\sin\angle SCK = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{11}\,(см^2)$.

Подставляя все необходимые найденные значения в формулу (*), получаем: $R = \dfrac{\sqrt{\frac{67}{3}}\cdot 3\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}}{4\cdot 2\sqrt{11}} = \dfrac{24\sqrt{67}}{3\cdot 2\cdot 4\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{67}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\dfrac{67}{11}}$ (см).

Окончательно имеем: $S_{сферы} = 4\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{67}{11}}\right)^2 = \frac{268\pi}{11}\left(см^2\right)$.

Ответ: $\frac{268\pi}{11}\left(см^2\right)$.

На четвертом этапе работы над задачей можно вначале попросить учащихся проверить ответ на правдоподобность или, по-другому, осуществить грубую прикидку результата. Исходя из размеров пирамиды, полученное значение площади поверхности описанной сферы (приближенно 73 $см^2$) вполне правдоподобно.

Далее целесообразно выделить теоретическую базу решения, включающую в себя теоремы Пифагора, косинусов, теорему о трех перпендикулярах, формулы площади треугольника, площади поверхности сферы, основное тригонометрическое тождество и т.д.

С целью нахождения других решений рассматриваемой задачи можно попросить учеников высказать свое мнение относительно расположения центра сферы в других плоскостях. В частности, справедливы будут предположения о расположении центра описанной сферы в плоскостях, перпендикулярных другим ребрам пирамиды и проходящих через их середины. На основе новых сделанных предположений допустимо предложить школьникам составить соответствующие граф–схемы поиска плана решения и решить задачу другими способами. Такую работу можно предложить, например, в виде домашнего задания. Совпадение ответов, полученных при решении задачи различными способами, подтвердит правильность решения. Принципиально иное (по отношению к разобранному в классе) решение специально поощряется.

Именно таким образом в идеале должна осуществляться работа над школьной математической задачей на практике в условиях реального урока. Однако, школьная реальность бывает слишком далека от такого идеала, а отсюда и происходят многие проблемы в математическом образовании учащихся. Из-за несформированности описанной выше последовательности действий при решении задач у учащихся чаще всего и отсутствуют умения не только решать задачи, но и доказывать теоремы, выводить какие-то формулы и т.д. Умение решать задачу есть фундамент любой творческой математической деятельности. Отсутствие этого фундамента и порождает неуверенность, а чаще всего даже панический страх у учащихся перед решением более или менее нестандартных проблем, как математического характера, так и любых жизненных проблем.

Библиографический список

1. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: монография. – Пенза: ПГПУ, 2005. – 283 с.

Оригинальность 92%