УДК 512.642

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ТРАНСПОЗИЦИИ

Абдуллин С.Р.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Дубровин В.М.

доцент ,к.т.н.,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Кисилёв В.В

доцент ,к.т.н.,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Аннотация.

В работе рассматривается оператор транспозиции, - в нашем случае это оператор перестановки двух координат вектора в n-мерном линейном пространстве. В вещественно-значном случае этот оператор имеет представление в виде матрицы с вещественными элементами. Исследуются некоторые его алгебраические и геометрические свойства, даётся методика получения корней заданной формыиз единичной матрицы.

Ключевые слова: Линейный оператор, перестановка, транспозиция, транспозитер, собственные числа и векторы, корни из матрицы, характеристическое уравнение, поле, гиперплоскости

SOME PROPERTIES OF THE TRANSPOSITION OPERATOR

Abdullin S.R.

senior lecturer,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Dubrovin V.M.

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Bauman Moscow State Technical

University

Moscow, Russia

Kiselev V.V.

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Bauman Moscow State Technical

University

Moscow, Russia

Annotation.

The paper considers the transposition operator, - in our case, it is the operator of the permutation of two coordinates of a vector in an n-dimensional linear space. In the real-valued case, this operator has a representation in the form of a matrix with real elements. Some of its algebraic and geometric properties are investigated, and a method for obtaining the roots of a given form of a unit matrix is given

Keywords

Linear operator, permutation, transposition, transpositor, eigenvalues and vectors, matrix roots, characteristic equation, field, hyperplanes

Основные понятия и определения

Для постановки задачи рассмотрим вектор n-мерного линейного пространства P^n с элементами из поля K [3] в следующем формате:

$\mathbf{x} = \{x_1{=}r_1;\ x_2{=}r_2;\ \dots x_i{=}r_i;\ \dots x_k{=}r_k;\dots\ x_n{=}r_n\}$

т.е слева даны названия координат, а справа – их значения.

Определение **Транспозитер** или оператор транспозиции i-ой и k-ой координат переставляет местами значения, принимаемые этими координатами, т.е.:

$T(i,k)\,\mathbf{x} = T(i,k)\,\{x_1=r_1;\ x_2=r_2;\ \ldots x_i=r_i;\ \ldots x_k=r_k;\ldots\ x_n=r_n\} =$

$\{x_1=r_1;\ x_2=r_2;\ \ldots x_i=r_k;\ \ldots x_k=r_i;\ldots\ x_n=r_n\}$ (1)

Предложение 1

Транспозитер является линейным оператором [3], в самом деле:

$T(i,k)\,(\alpha x + \beta y) = T(i,k)\,\|\,\alpha x_i + \beta y_i\,\| = \alpha\, T(i,k)\, x + \beta\, T(i,k)\, y$

где α, β элементы поля K, X и Y – векторы из P^n, в двойных вертикальных обкладках представлена матрица **n** x **1** (она же – вектор) в форме общего элемента

Предложение 2

Транспозитер является одним из значений квадратного корня из единичной матрицы E_n [3]. Действительно, рассмотрим композицию

$T(i,k) * T(i,k)\ \{ x_1=r_1;\ \ldots\ x_i=r_i;\ \ldots x_k=r_k;\ldots\ x_n=r_n \}=$

$T(i,k)\ \{x_1=r_1;\ x_2=r_2;\ \ldots x_i=r_k;\ \ldots x_k=r_i;\ldots\ x_n=r_n\}=$

$\{x_1=r_1;\ x_2=r_2;\ \ldots x_i=r_i;\ \ldots x_k=r_k;\ldots\ x_n=r_n\}$, т.е. $T(i,k)^2 = E_n$ (2)

Предложение 3.

Число транспозитеров в n-мерном линейном пространстве P^n совпадает с числом транспозиций [1] в **n**-перестановке и равно n*(n+1)

Следствие.

Число квадратных корней из единичной **n**-мерной матрицы E_n - вида транспозитера - равно n*(n+1)

Замечание При этом множество квадратных корней из матрицы E_n не исчерпываются только лишь транспозитерами, о чём говорит следующая лемма.

Лемма 1

Число квадратных корней N_2 из матрицы E_n с вещественными элементами удовлетворяет неравенству:

$$N_2 \{q \mid q^2 = E_n\} \geq \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} \qquad (3)$$

Доказательство

Квадратный корень из E_n можно получить, беря все транспозитеры, - их число это $\binom{n}{2}$ [1], затем считаем по два транспозитера одновременно, затем по три транспозитера одновременно, и так далее до целого числа [n/2] Более строго: берём все транспознтеры T(i,k) , затем всевозможные произведения двух транспозитеров (с разными парами аргументов!), т.е. $T(i_1,k_1)*T(i_2,k_2)$, а число таких произведений равно числу сочетаний из **n** по 4. Далее берём всевозможные произведения трёх транспозитеров вида $T(i_1,k_1)*T(i_2,k_2)*T(i_3,k_3)$, (с разными парами аргументов!), и число таких произведений равно числу сочетаний из **n** по **6**, и, очевидно доказательство формулы по индукции.

Замечание. Лемма 1 фактически даёт способ конструирования квадратных корней из E_n

Матричное представление транспозитера

До сих пор мы рассматривали транспозитер как абстрактный оператор, а сейчас напишем его матричный вид [2]. Примем во внимание, что все значения координат после действия транспозитера T(i,k), кроме переставляемых значений r_i и r_k, остаются неизменными и только значения координат x_i и x_k меняются друг на друга

$T(i,k)\ \{ x_1=0; \ldots x_i=r_i; \ldots x_k=r_k; \ldots x_n=0 \} = \{ x_1=0; \ldots x_i=r_k; \ldots x_k=r_i; \ldots x_n=0\}$

По правилу левого умножения матрицы на вектор-столбец на диагонали матрицы, представляющей T(i,k), будут стоять 1, а вот в i-ой строчке будет **1** на k-ом месте, и в k-ой строчке будет **1** на i-ом месте, т.е. T(i,k) будет иметь следующее матричное представление:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & & \dots & & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & \dots & 1 & & & \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & & & 1 & \dots & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 1
\end{array} \qquad (4)$$

Собственные числа и собственные векторы транспозитера.

Уравнение для собственных значений

$T(i,k)\ x = \lambda \cdot x$ имеет нетривиальное решение только если определитель матрицы $\|T(i,k) - \lambda \cdot E_n\|$ равен нулю [3], т.е.

$$|T(i,k) - \lambda \cdot E_n| = 0 \qquad (5)$$

После подстановки получим $x \cdot (1-\lambda^2) = 0$

Очевидно, решения возможны для двух случаев: $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$

1^0 $\lambda = 1$

Тогда получим систему из n линейных уравнений, в которой только два будут нетождественными:

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_k \end{Bmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{Bmatrix} x_k \\ x_i \end{Bmatrix}$$

Непосредственно получим: $x_1 = x_k = \alpha$ - некоторый параметр,

все остальные координаты принимают произвольные значения

2^0 $\lambda = -1$

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ x_k \end{Bmatrix} = (\mathbf{-1}) \cdot \begin{Bmatrix} x_k \\ x_i \end{Bmatrix}$$

В этом случае получим: $x_1 = x_k = \alpha$ - некоторый параметр,

а все остальные координаты равны нулю.

Геометрические свойства решений характеристического уравнения

Дадим описание множеству собственных векторов (С.В.) траспозитора T(i,k)

В случае $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$ множество С.В. представляют из себя гиперплоскость коразмерности 1 [3], пересекающую 2-мерную плоскость $x_1O\ x_k$ по биссектрисе положительного квадранта этой плоскости и имеющее координатное представление:

$$M(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}) = \{\ x_1=r_1;\ x_2=r_2;\ \dots x_i=\alpha;\ \dots x_k= \alpha;\dots\ x_n=r_n\} \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ - произвольный параметр

В случае $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-\ 1}$ С.В. представляют из себя прямую линию в плоскости $x_1O\ x_k$, совпадающую с биссектрисой полуотрицательного квадранта в этой плоскости, а все остальные координаты необходимо равны нулю :

$$M(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-1}) = \{\ x_1=0;\ x_2=0;\ \dots x_i=\beta;\ \dots x_k= -\beta;\dots\ x_n=0\} \qquad (7)$$

где β - произвольный параметр

Легко видеть, что множества M($\boldsymbol{\lambda}$ **= 1)** и M($\boldsymbol{\lambda}$ **= -1)** ортогональны.

К вышесказанному остаётся добавить, что транспозитор T(i,k) явлется изометрическим оператором, т.е. его действие сохраняет длину вектора.

Библиографический список:

1. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Грани алгебры. – М: ФАКТОРИАЛ ПРЕСС, 2008, - 328 стр.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III , Основные структуры алгебры. - М.: МЦНМО, 2018, – 272 стр.
3. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М. –Ижевск, 2014, - 554 с.

Оригинальность 93%