

УДК 519.86

**ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГИОНА**

**Кетова К. В.**

*д. ф.-м. наук, профессор,*

*Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,*

*Ижевск, Россия*

**Вавилова Д. Д.**

*аспирант,*

*Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,*

*Ижевск, Россия*

**Ларин В.О.**

*студент,*

*Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,*

*Ижевск, Россия*

**Аннотация**

Работа посвящена вопросу изучения зависимости между величиной затраченных ресурсов и объемом выпускаемой продукции на уровне региональной экономической системы. Построен и проанализирован ряд производственных функций, применяемых при моделировании экономических процессов на макроуровне.

Расчеты выполнены на примере статистических данных по экономическим показателям Удмуртской Республики за период 2000-2018 годы.

Представлены результаты сравнительного анализа построенных производственных функций с точки зрения адекватности описания происходящих процессов.

**Ключевые слова:** производственная функция, экономико-математическое моделирование, валовой региональный продукт, факторы производства.

***CONSTRUCTION OF PRODUCTION FUNCTIONS  
ECONOMIC SYSTEM OF THE REGION***

***Ketova K. V.***

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,  
Izhevsk, Russia*

***Vavilova D. D.***

*graduate student,  
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,  
Izhevsk, Russia*

***Larin V. O.***

*student,  
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,  
Izhevsk, Russia*

**Abstract**

The paper addresses the problem of a relationship between volume of resources being spent and turnout at the level of regional economic system. Several production functions were built and analyzed which are to be used for modeling economic processes at the macro level.

Calculations were performed using data on economic parameters of the Udmurt Republic as of 2000-2018 as an example.

The results of a comparative analysis of the production functions with regard to the relevance of current processes description were introduced.

**Keywords:** production function, economic and mathematical modeling, gross regional product, production factors.

Задача построения зависимости между величиной затраченных ресурсов и объемом выпускаемой продукции как на микроуровне, так и на макроуровне имеет большое практическое значение. Эта задача решается методами экономико-математического моделирования. Важным инструментом математического анализа экономических процессов являются производственные функции (ПФ). Одними из основополагающих работ в теории производственных функций в прошлом столетии можно считать работы Г.Клейнера [1], Л. Терехова [2], Н. Баркалова [3].

Решение задачи построения ПФ обусловлено необходимостью анализа взаимосвязи производственных ресурсов и конечного выпуска продукции. Поэтому построение ПФ является актуальной задачей и в настоящее время. Результаты современных исследований в этом направлении представлены, например, в работах [4-7].

Производственные функции применяются при анализе эффективности ресурсов производства [8], при оценке научно-технического прогресса и изучении его влияния на производство [9]. С помощью ПФ возможен учет факторов различного характера, например, такого показателя, как человеческий капитал [10].

С помощью ПФ возможно прогнозирование результатов производственной деятельности; такие исследования на макроуровне приведены в работах [11-13]. На базе ПФ исследуются во взаимосвязи показатели производства и распределения валового регионального продукта (ВРП), потребления и накопления, эффективности капиталовложений и т.д. [14,15].

Следует отметить, что при анализе и прогнозировании экономических характеристик ПФ может использоваться исследователем в качестве экономико-математической модели как обособленно, так и в составе более сложных

Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

моделей, позволяющих решать управленческие задачи и строить оптимальные стратегии движения экономических систем [16-18]. В этом случае для построения аналитического решения важны математические свойства ПФ, например, такие, как выпуклость, линейная однородность, аддитивность и т.д.

Основной принцип построения производственной функции (ПФ) требует, чтобы набор факторов был полон и непротиворечив, т.е. чтобы в функцию были включены все факторы, оказывающие влияние на результат, и чтобы среди них не было дублирования.

Будем осуществлять построение ряда ПФ на примере экономической системы одного из регионов Российской Федерации – Удмуртской Республики (УР). На основании рейтинга [19] и данных по макроэкономическим показателям регионов РФ [20] УР является среднестатистическим регионом по макроэкономическим показателям, отражающим средний уровень развития экономики по стране.

Рассмотрим период 2000-2018 годы. Все показатели, измеряемые в денежном выражении, приведем к 2018 году с использованием индексов-дефляторов [21]. Для анализа используем некоторые наиболее часто применяющиеся виды ПФ:

1. *Производственная функция Кобба-Дугласа:*

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (1)$$

где  $Y$  – объем производства в стоимостном выражении;  $A$  – технологический коэффициент;  $K$  – производственный капитал в стоимостном выражении, на уровне моделирования макроэкономических процессов рассматривается как основные производственные фонды (ОПФ);  $L$  – численность трудовых ресурсов;  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты эластичности, означающие на сколько увеличится объем производства, если соответствующий фактор производства увеличится на 1%. В качестве фактора трудовых ресурсов в последнее время при исследовании

макроэкономических процессов используется характеристика человеческого капитала, выраженная в стоимостном выражении [10].

Взаимодействующие в рамках ПФ ресурсы могут в известном смысле замещать друг друга, т.е. единицу одного ресурса можно заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции останется прежним.

### 2. Однородная линейная производственная функция порядка $k$ :

$$Y = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \right)^k, \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  – оцениваемые параметры, при факторах производства  $X_i$ .

Здесь определенное количество  $i$ -го фактора, независимо от степени насыщения им производства, может заменить единицу  $j$ -го фактора (в случае, когда норма замены постоянна). Чаще всего ПФ (2) применяется для моделирования систем, в которых выпуск продукции является результатом одновременного функционирования множества различных технологий.

### 3. Производственная функция Солоу:

$$Y = \left( \alpha_1 X_1^{\alpha_{n+1}} + \dots + \alpha_n X_n^{\alpha_{2n}} \right)^{\alpha_{2n+1}}. \quad (3)$$

Функция (3) применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и, вместе с тем, есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов.

### 4. Производственная функция Аллена:

$$Y = \alpha_0 X_1 X_2 - \alpha_1 X_1^2 - \alpha_2 X_2^2. \quad (4)$$

Функция (4) предназначена для описания производственных процессов, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное воздействие на объем выпуска.

### 5. Аддитивная функция (многофакторная регрессионная модель).

Частным случаем функции (2) является аддитивная ПФ ( $k=1$ ), представляющая стохастическую зависимость между результирующим показателем  $Y$  и переменными  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n. \quad (5)$$

Оценивая ПФ на макроуровне региона, в качестве результирующего показателя выпуска продукции подавляющее большинство исследователей рассматривают валовой региональный продукт (ВРП), различия при исследовании касаются факторов производства.

Для моделей вида (5), например, в работе [14] в качестве факторов производства ВРП рассматривается объем промышленного производства, сельскохозяйственного производства, строительства и т.п. В работах других исследователей рассматривается эффект зависимости ВРП от объемов инвестирования в различные факторы производства [8], индикаторов социально-экономического развития [11] и др.

*б. Мультипликативная регрессионная модель зависимости ВРП от объемов производства:*

$$Y = AX_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}. \quad (6)$$

Построена на основе ПФ Кобба-Дугласа (1); использует большее количество переменных.

Для построения любой из ПФ необходимо провести качественный анализ моделируемой зависимости и объяснить выбор влияющих факторов. Выбор факторных переменных производится на основе логического анализа возможных взаимосвязей между признаками, формирующими производственный процесс на микро- или макроуровне.

На примере статистических данных УР за период 2000-2018 годы [22] были оценены ПФ вида (1)-(6). Построенные ПФ представлены в таблице 1. Оценка значимости построенных моделей произведена на уровне  $\alpha = 0,01$ . Для выбора наилучшей экономико-математической модели были рассчитаны показатели:

– коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^N (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}, \quad (7)$$

– средняя ошибка аппроксимации

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right| \cdot 100\%. \quad (8)$$

В формулах (7) и (8)  $N$  – количество значений (лет);  $\hat{y}_t$  – значение показателя в момент времени  $t$ , рассчитанное по модели;  $y_t$  – статистическое значение показателя в момент времени  $t$ ;  $\bar{y}$  – среднее статистическое значение показателя за весь изучаемый период времени.

Таблица 1 – Производственные функции, построенные по статистическим данным макроэкономических показателей Удмуртской Республики за период 2000-2018 годы

№ п/п	Наименование ПФ	Вид ПФ	Коэффициент детерминации	Ошибка аппроксимации
$K$ – основные производственные фонды (руб.), $L$ – численность трудовых ресурсов (чел.)				
1	ПФ Кобба-Дугласа ( $\alpha + \beta = 1$ )	$Y = 0,72K^{0,45}L^{0,55}$	0,65	8,5
2	ПФ Кобба-Дугласа ( $\alpha + \beta \neq 1$ )	$Y = 0,02K^{1,42}L^{0,66}$	0,53	9,3
3	Однородная линейная ПФ ( $k = 1$ ) зависимости ВРП от вложений в ОПФ и трудовые ресурсы	$Y = 0,23K + 0,62L$	0,80	7,9
4	Производственная функция Аллена	$Y = 0,002KL - 0,001K^2 - 0,003L^2$	0,81	7,8
Объемы (руб.): $X_1$ – промышленное производство, $X_2$ – торговля, $X_3$ – строительство, $X_4$ – сельское хозяйство, $X_5$ – сфера услуг				
5	Аддитивная регрессионная модель зависимости ВРП от объемов производства	$Y = 39,8 + 0,56X_1 + 1,74X_2 + 0,49X_3 - 0,35X_4 - 2,94X_5$	0,96	2,9
6	Мультипликативная регрессионная модель зависимости ВРП от объемов производства	$Y = X_1^{0,69} X_2^{0,43} X_3^{0,05} X_4^{0,01} X_5^{-0,10}$	0,97	2,6

Все модели, описывающие зависимость между ВРП и факторами производства, построенные по статистическим данным экономики УР, являются значимыми (с уровнем надежности 99 %).

ПФ Кобба-Дугласа с условием линейной однородности  $\alpha + \beta = 1$  имеет вид  $Y = 0,72K^{0,45}L^{0,55}$ . Значения коэффициента эластичности по производственному капиталу (ОПФ)  $\alpha = 0,45$  и коэффициента эластичности по трудовым ресурсам  $\beta = 0,55$  показывают, что увеличение затрат на производственные фонды на 1 % соответствуют увеличению выпуска продукции на 0,45 %; а увеличение численности трудовых ресурсов на 1 % приводит к увеличению выпуска на 0,55 %. Отношение коэффициентов эластичности  $\alpha/\beta = 0,82$  свидетельствует о том, что в экономической системе региона присутствует небольшой дефицит фактора трудовых ресурсов.

ПФ Кобба-Дугласа без ограничения на коэффициенты эластичности  $Y = 0,02K^{1,42}L^{0,66}$  показывает, что экономическая система УР функционирует в условиях интенсивного использования основных производственных фондов.

Однородная линейная функция зависимости ВРП от вложений в ОПФ и трудовые ресурсы вида  $Y = 0,23K + 0,62L$  показывает, что при росте ОПФ на 1 руб. ВРП увеличивается на 23 коп., а при увеличении затрат на оплату труда на 1 руб. выпуск возрастает на 62 коп. при неизменном среднем уровне другого фактора.

Производственная функция Аллена вида  $Y = 0,002KL - 0,001K^2 - 0,003L^2$  трудно интерпретируема, однако также может быть использована для моделирования динамики ВРП региона.

Аддитивная регрессионная модель зависимости ВРП от выраженных в стоимостном выражении объемов промышленного производства ( $X_1$ ), торговли ( $X_2$ ), строительства ( $X_3$ ), сельского хозяйства ( $X_4$ ) и сферы услуг ( $X_5$ ) за период 2000-2018 годы в УР имеет вид



$Y = 39,8 + 0,56X_1 + 1,74X_2 + 0,49X_3 - 0,35X_4 - 2,94X_5$ . На основании проведенных построений можно сделать заключение, что наибольший вклад в величину ВРП региона вносят торговля и промышленное производство.

Мультипликативная регрессионная модель зависимости ВРП от приведенных выше факторов  $\{X_1, \dots, X_5\}$  имеет вид:

$Y = X_1^{0,69} X_2^{0,43} X_3^{0,05} X_4^{0,01} X_5^{-0,10}$ , что интерпретируется следующим образом: в экономической системе УР увеличение промышленного производства на 1 руб. приводит к возрастанию валового регионального продукта на 69 коп., рост торгового оборота на 1 руб. приводит к росту ВРП на 43 коп., увеличение объемов строительства на 1 руб. – к увеличению ВРП на 5 коп., увеличение объемов сельскохозяйственного производства на 1 руб. – к увеличению ВРП на 1 коп., рост же объемов оборота в сфере услуг увеличения ВРП не дает.

Результаты, полученные по интерпретации производственных функций разного вида, приводят к одним и тем же оценкам и не противоречат друг другу. В то же время, наибольшим коэффициентом детерминации и наименьшей ошибкой аппроксимации по сравнению с другими обладает мультипликативная регрессионная модель зависимости ВРП от объемов промышленного производства, торговли, строительства, сельского хозяйства и сферы услуг.

На рис. 1 представлены статистические данные ВРП по УР за период 2000-2018 годы и модельные значения, рассчитанные по ПФ вида  $Y = X_1^{0,69} X_2^{0,43} X_3^{0,05} X_4^{0,01} X_5^{-0,10}$ . Видно хорошее совпадение полученного по модели результата с реальными статистическими данными.

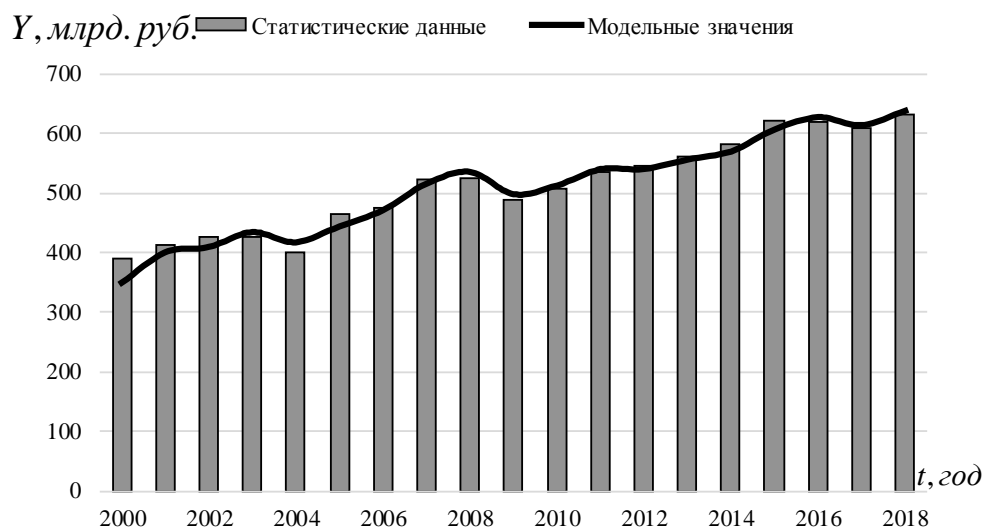


Рис. 1 – Статистические и модельные данные ВРП УР за период 2000-2018 годы в сопоставимых ценах 2018 года (мультипликативная регрессионная модель вида  $Y = X_1^{0,69} X_2^{0,43} X_3^{0,05} X_4^{0,01} X_5^{-0,10}$ )

Средняя относительная ошибка аппроксимации модели, представленной на рис. 1, составила 2,6 %. Коэффициент детерминации мультипликативной регрессионной модели зависимости ВРП, равный 0,97, объясняет на 97 % вариацию валового выпуска вариацией набора факторов производств: объема промышленного производства, торговли, строительства, сельского хозяйства и сферы услуг.

Данная модель является наиболее подходящей и адекватной для прогноза главной характеристики состояния региональной экономической системы – валового регионального продукта.

### Библиографический список:

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
2. Терехов Л.Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974. – 128 с.
3. Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 126 с.
4. Афанасьев А. А., Пономарева О. С. Народнохозяйственная Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМИ Эл № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

производственная функция России в 1990-2017 г.г. // Экономика и математические методы. – 2020. - Т. 56, № 1. – С. 67-78.

5. Насридинова Д.Д., Касаткина Е.В. Построение и анализ производственной функции экономической системы Удмуртской Республики // В сборнике: Молодые ученые – ускорению научно-технического прогресса в XXI веке электронное научное издание. – ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова». – 2013. – С. 706-710.

6. Шишмакова Н.С., Петрова И.С. Математическая модель Солоу для экономики России // Дневник науки. - 2019. - №1. - URL: [http://dnevniknauki.ru/images/publications/2019/1/economy/Shishmakova\\_Petrova.pdf](http://dnevniknauki.ru/images/publications/2019/1/economy/Shishmakova_Petrova.pdf) (дата обращения: 13.06.2020).

7. Кирилук И.Л. Модели производственных функций для РФ // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – № 2. – С. 293-312.

8. Савинова О.В. Зависимость увеличения инвестиций от прироста ВРП в расчете «эффекта мультипликатора инвестиций» // Экономическая теория. – 2009. – №4 (53). – С. 90-95.

9. Сокол Г. А. Применение производственных функций типа ves-функции для моделирования функционирования социально-экономических систем // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. - 2016. -№ 09-10. - С. 50-55

10. Русяк И.Г., Кетова К.В. Построение производственной функции экономической системы региона с учетом человеческого капитала // Вестник Московского университета. Серия 6: Экономика. – 2008. – № 1. – С. 39.

11. Кетова К.В., Касаткина Е.В., Насридинова Д.Д. Прогнозирование показателей социально-экономического развития региона // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2013. – № 4 (28). – С. 104-120.

12. Абдуллаев И.С. Моделирование экономической динамики и производственные функции // Российское предпринимательство. – 2009. Том 10. № 11. – С. 173-176. – URL: <https://creativeconomy.ru/lib/5708> (дата обращения: Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

13.06.2020).

13. Кетова К.В., Касаткина Е.В., Насридинова Д.Д. Прогнозирование динамики инвестиционных процессов // Вестник Ижевского государственного технического университета. - 2013.- № 3. – С. 150-154.

14. Петров А.Н. Эконометрические модели динамики валового регионального продукта // Современные наукоемкие технологии. – 2009. – №3. – С. 40-44.

15. Баранов С.В. Эконометрические модели производственных функций: история и современность // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 10-2. – С. 53-57; URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=5996> (дата обращения: 13.06.2020).

16. Кетова К.В. Разработка методов исследования и оптимизация стратегии развития экономической системы региона: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / ГОУВПО «Ижевский государственный технический университет». – Ижевск, 2008.

17. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики / А.В. Прасолов. – СПб.: Издательство «Лань». – 2013. – 352 с.

18. Кетова К. В., Беленький В. З. Полное аналитическое решение макро модели развития региона при экзогенном демографическом прогнозе // Экономика и математические методы. - 2006. - Т. 42. Вып. 4. - С. 85–95.

19. Рейтинг социально-экономического положения регионов – 2019 // РИА Рейтинг. URL: <https://riarating.ru/infografika/20190604/630126280.html> (дата обращения 15.02.2020).

20. Регионы России. Основные характеристики субъектов Российской Федерации // Федеральная служба государственной статистики. URL: <https://www.gks.ru/folder/210/document/13205> (дата обращения 15.02.2020).

21. Официальный сайт федеральной службы государственной статистики РФ. Индексы-дефляторы, в % к предыдущему году. URL: [https://www.gks.ru/storage/mediabank/tab4\(1\).htm](https://www.gks.ru/storage/mediabank/tab4(1).htm) (дата обращения 02.06.2020).

22. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Удмуртской Республике. URL: <https://udmstat.gks.ru/ofstatistics/> (дата обращения 10.06.2020).

*Оригинальность 83%*