УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Бутина Т. А.

к.ф.-м.н, доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Дубровин В. М.

к.т.н, доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Полякова Н. С.

к.ф.-м.н, доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

Предложен метод оценки устойчивости произвольной упругой деформируемой системы при действии на нее нагрузок различного рода. В качестве критерия устойчивости основного состояния консервативной системы выбрано минимальное значение потенциальной энергии системы по отношению к значению энергии всех смежных состояний системы. Это дает возможность построить границу, разделяющую области устойчивости и неустойчивости системы. Как пример использования предложенного метода рассмотрена устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии осевой сжимающей силы и внешнего избыточного давления.

Ключевые слова: система, устойчивость, потенциальная энергия, основное состояние системы, смежное состояние систем, область устойчивости, область неустойчивости, цилиндрическая оболочка, осевая сжимающая сила, избыточное внешнее давление.

STABILITY OF ELASTIC DEFORMABLE SYSTEM UNDER COMBINED LOADING

Butina T. A.

candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Dubrovin V. M.

candidate of technical sciences, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Polyakova N. S.

candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation

A method for assessing the stability of an arbitrary elastic deformable system under the action of loads of various kinds is proposed. The minimum value of the potential energy of the system to the value of energy of all adjacent states of the system is chosen as a criterion of stability of the ground state of the conservative system. As an example of using the proposed method, the stability of the cylindrical shell under the simultaneous action of the axial compressive force and external overpressure is considered.

Keywords: system, stability, potential energy, the main state of the system, the adjacent state of the systems, the stability region, the instability region, the cylindrical shell, the axial compressive force, excess external pressure.

На плоскости с координатными осями P и Q рассмотрим точку A с координатами P_0 и Q_0, лежащую в области устойчивости, относящейся к основному состоянию (рассматривается устойчивость в малом), так как показано на рис 1.

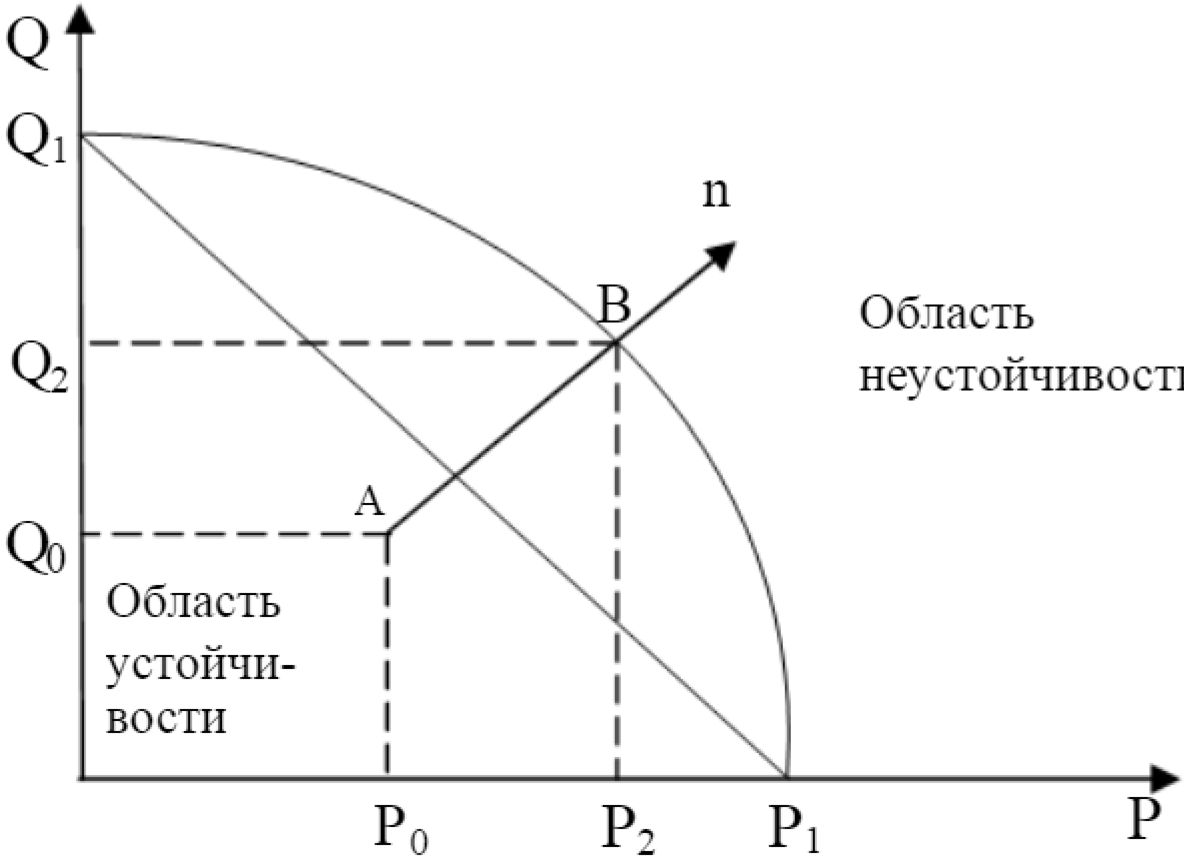

Рис 1. Область устойчивости системы

Полную энергию системы, соответствующую точке A(P_0, Q_0), представим в виде:

$$L = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i P_0 - \gamma_i Q_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S_i q_i^2,$$

где q_i - обобщенные координаты, изменяющиеся при переходе от основного равновесного состояния к смежному [1-2].

Функция L и ее производные $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ равны нулю лишь при $q_i = 0$. Тогда воспользуемся теоремой Лежён-Дирихле: "Если в некотором (основном) состоянии консервативной системы потенциальная энергия минимальна по отношению к значениям энергии всех смежных (отклоненных) состояний системы, то основное состояние является положением устойчивого равновесия", и обращением Ляпунова этой теоремы: "Если в основном положении равновесия потенциальная энергия не является минимальной, а отсутствие минимума определяется членами второго порядка в разложении потенциальной энергии, то положение будет неустойчиво" [3, 4].

Из условия равновесия основного состояния следует, согласно этим теоремам, что $\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} = S_i > 0$. Будем изменять нагрузку, приложенную к системе, полагая $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{kx}, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{lx}$

где k, l – направляющие косинусы луча A_n (рис. 1). Тогда в новом состоянии, в которое перешла система, полная энергия будет равна

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[S_i - x(k\beta_i + l\gamma_i)]q_i^2$$

Обозначив $\beta_i k + l\gamma_i = r_i$, будем иметь

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(S_i - r_i x)q_i^2;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}L = S_i - r_i x$$

Знак r_i определяется знаком параметров k, l. При $r > 0$ для некоторого x получим

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}L = S_i - r_i x = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Условие (1) соответствует потере устойчивости системы в смысле Лежён-Дирихле и Ляпунова. Следовательно, определится пара критических значений

P_2, Q_2, при которых выполняется условие (1). При дальнейшем возрастании x всегда будет выполняться соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} L = S_i - r_i x < 0. \qquad (2)$$

Это означает, что переход через точку B с координатами P_2, Q_2 приводит систему в область неустойчивого положения. Предположим, что условия (1), (2) выполняются для всех точек B_i, лежащих на некоторой линии, отделяющей устойчивую область от неустойчивой. Тогда, если двигаться вдоль луча A_n от точки A, после перехода точки B нельзя уже вернуться в область устойчивости, определяемую условием

$S_i - r_i\, x < 0.$

Аналогичный вывод можно получить для любой граничной точки B_i. Если $r_i < 0$, всегда $\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} L > 0$ и, следовательно, система всегда находится в состоянии устойчивости. Таким образом, по области устойчивости в произвольном направлении можно либо пересечь только один раз границу этой области, либо не пересекать ее совсем. Это может быть лишь в случае, если граница области выпуклая в сторону области неустойчивости. Уравнение линии, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости в общем случае может быть представлено в виде:

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^m + \left(\frac{P}{Q_1}\right)^n = 1 \qquad (3)$$

где m, n – параметры линии.

Учитывая это, при P_1, Q_1 соответствующих раздельному приложению нагрузки, можно приближенно установить значения критических нагрузок при комбинированном нагружении. Тогда прямая P_1Q_1 дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение величин критических нагрузок при их совместном приложении. В этом случае уравнение прямой

$$\frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} = 1$$

описывает множество всех значений критических нагрузок при совместном приложении двух видов нагрузок.

Указанный подход к оценке критических нагрузок можно распространить на случай большего числа различных видов нагружения. Так, при совместном действии трех видов нагрузок P, Q, R вместо линии (3) будем иметь поверхность

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^m + \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^n + \left(\frac{R}{R_1}\right)^l = 1,$$

где m, n, l –параметры поверхности, P_1, Q_1, R_1 - значения критических нагрузок при их раздельном приложении. Тогда плоскость

$$\frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} = 1$$

дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение величин критических нагрузок P, Q, R при их совместном приложении. При $\boldsymbol{k}$ различных видов нагрузок получается $\boldsymbol{k}$-мерная поверхность, отделяющая область устойчивости от области неустойчивости. В общем случае уравнение этой поверхности

$$\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{P}_1}\right)^{n_1} + \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{Q}_1}\right)^{n_2} + \ldots + \left(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}_1}\right)^{n_k} = 1$$

а гиперплоскость $\frac{P}{P_1}+\frac{Q}{Q_1}+...+\frac{R}{R_1}=1$ дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение величин критических нагрузок P, Q, R при их совместном приложении. В предположении линейной зависимости исходного состояния системы от нагрузки имеет место следующая теорема [3]: "Граничная поверхность не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости". Отсюда следует, что любой луч, проведенный из области устойчивости либо вовсе не пересекает граничную поверхность, либо пересекает ее не более одного раза. Если же провести отрезок, соединяющий две точки граничной поверхности, то этот отрезок или будет полностью лежать в области устойчивости, или будет составлять часть граничной поверхности. Из этой теоремы следует условие

$$\sum_{i=1}^{k} C_i = 1 \qquad (4)$$

где C_i – отношение нагрузок к их экспериментальным или теоретическим критическим значениям при раздельном воздействии нагрузок.

Эта оценка с запасом устойчивости и в некоторых случаях является заниженной. Как пример использования предложенного метода оценки устойчивости системы рассмотрим цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием двух видов нагрузок.

Так, например, при совместном действии осевой сжимающей нагрузки и избыточного внешнего давления на цилиндрическую оболочку средней длины уравнение равновесия имеет вид [3]

$$K_2^2 D(\lambda^2+n^2)(\lambda^2+n^2)+\gamma^4 Eh(\lambda^2+n^2)^{-2}+T_1\lambda^2+T_2 n^2-2S^0\lambda n=0, \qquad (5)$$

где K_2 – главная кривизна оболочки в окружном направлении

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жесткость оболочки на изгиб

E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки

$\lambda = \frac{mnR_2}{L_{об}}$ – длина полуволны в окружном направлении

h, R_2 – толщина, радиус и длина оболочки

m, n – количество полуволн в окружном и продольном направлениях

T_1, T_2, S^0 – погонные нормальные и сдвигающие усилия

Уравнение (5) может быть представлено в виде

$$\frac{R_2 Q}{Eh} = \frac{\lambda^2}{n^2}\left[\frac{T_2^2}{Eh} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+n^2)} + \frac{h^2}{12R_2^2}\cdot\frac{1}{(1-\lambda^2)}\right)\cdot\frac{(\lambda^2+n^2)^2}{\lambda^2}] \quad (6)$$

Введем обозначения: $R_c = -\frac{T_1}{T_в}$, где $T_в$ – верхнее критическое значение осевой силы;

$$Q_2 = \frac{QR_1}{T_в};\ \chi = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{\alpha_1}};\ \alpha_1 = \frac{h^2}{12R_2^2};\ \alpha_2 = \frac{2}{\chi};\ Z_1 = \mu\alpha_2, \mu = \frac{1}{2}\left(1+\frac{n^2}{\lambda^2}\right).$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$Q_2 = \frac{\alpha_2}{2Z-\alpha_2}[\frac{1}{2}\left(Z_1^2 + \frac{1}{Z_1^2}\right) - R_c], \quad (7)$$

откуда

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} = \frac{2Z_1}{(2Z_1-\alpha_2)^2} = [\frac{1}{2}\left(Z_1^2 + \frac{1}{Z_1^2}\right) - R_c]$$

Функция $\varphi\,(Z_1) = \frac{1}{2}\left(Z_1^2 + \frac{1}{Z_1^2}\right)$

имеет минимальное значение, равное единице.

Параметр R_c изменяется в пределах $(-1,1)$. Следовательно, производная $\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \geq 0$. При этом равенство нулю производной может иметь место только при $R_c = 1$. В этом случае оболочка теряет устойчивость при действии лишь одного продольного усилия $N = -T_1$. Исключим этот частный случай, так как рассматривается совместное действие на оболочку двух видов нагрузки; при этом $\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \geq \varphi$. Это означает, что функция $Q_2(\alpha_2)$ монотонно возрастает и имеет минимум при $m = 1$.

Из условия минимума функции Q_2 по переменной Z_1 получим уравнение для определения μ:

$$(\alpha_2\mu)^4 = -3 + \frac{2}{\mu-1} - \varepsilon\mu^2\left(1 + \frac{1}{\mu-1}\right), \qquad (8)$$

где $\varepsilon = \frac{8R_c}{\chi^2}$. Уравнения (7), (8) определяют границу устойчивости оболочки. При $\mu \gg 1$ можно получить простые приближенные формулы для Q_2. Пренебрегая в формуле (8) величинами порядка $\frac{1}{\delta-1}$ по сравнению с единицей, будем иметь $\mu = \frac{\sqrt{\theta}}{\alpha_2}$, где $\theta = -R_c + \sqrt{R_c^2} + 3$. Подставим μ в уравнение (7), получим

$$Q_2 = \frac{1}{2(\chi\sqrt{\theta}-1)}\left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c\right). \qquad (9)$$

Для оболочек средней длины $\chi \gg 1$. Тогда

$$Q_2 = \frac{1}{2\chi\sqrt{\theta}}\left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c\right). \quad (10)$$

Выводы. Полученные соотношения позволяют определить область устойчивости оболочек при совместном действии осевой силы и внешнего избыточного давления. При действии циклической нагрузки область устойчивости цилиндрической оболочки получена в работе [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошных сред /Ю.И. Димитриенко // М.: Физматгиз, 2009, 624с.
2. Фролов К.В. Избранные труды, т.2 / К.В. Фролов // Машиноведение и машиностроение. - М.: Наука, 2007, 522с.
3. Жилин П.А. Основы теории оболочек /П.А. Жилин // Санкт-Петербург.: изд-во Политехнического университета, 2006, 306с.
4. Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций /Ю.А. Окопный, В.П. Радин, В.П. Чирков // М.: Машиностроение, 2001, 408с.
5. Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки /В.М. Дубровин, Т.А. Бутина // Инженерный журнал " Наука и инновации". – 2013. - №.9(21). - 19с.

Оригинальность 91%