УДК 519.7

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ПОДГОТОВКЕ БАЗ ДАННЫХ

Гарькина И.А.

д.т.н., профессор

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Пенза, Россия

Стрельцова А.А.

студент

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Пенза, Россия

Аннотация. Приводятся специальные методы аппроксимации функций многих переменных, ориентированные на использование в составе имитатора динамики объекта эргатической системы (интегрирование уравнений движения нестационарных нелинейных систем с последовательным уточнением на каждом шаге начальных условий задачи Коши). Предлагается и метод аппроксимации на основе ортогональных композиционных планов, обладающий простотой практической реализации. Методы прошли практическую апробацию при разработке композиционных материалов по кинетическим процессам формирования их физико-механических характеристик.

Ключевые слова: кинетические процессы, базы данных, аппроксимация, объект управления, планирование эксперимента.

APPROXIMATION PROBLEMS IN PREPARING DATABASES

Garkina I.A.

doctor of technical sciences, professor

Penza State University of Architecture and Construction

Penza, Russia

Streltsova A.A.

student

Penza State University of Architecture and Construction

Penza, Russia

Annotation. The ad hoc methods of approximation of functions of many variables oriented to use as a part of the simulator of dynamics of an object of an ergatic system are provided (integration of motion equations of non-stationary nonlinear systems with consecutive specification on each step of initial conditions of a task of Cauchy).A method of approximation based on orthogonal compositional plans is proposed, which has the simplicity of practical implementation. Methods have been tested in the development of composite materials on the kinetic processes of the formation of their physico-mechanical characteristics.

Keywords: kinetic processes, databases, approximation, control object, experiment planning.

До настоящего времени не потеряла свою актуальность разработка материалов на основе изучения кинетических процессов формирования их физико-механических характеристик. Известно [1], модели таких процессов могут рассматриваться как решение задач Коши для линейных дифференциальных уравнений *n*-го порядка (*n* редко превышает четырех, в основном для дисперсных систем). Идентификация сводится к определению характерных точек экспериментально полученных процессов на основе их аппроксимации.

Начнем с важной практической задачи по аппроксимации функции [2] трех переменных $F(u,v,w)$. Будем полагать, что она определена по экспериментальным данным: задана таблично-графически на параллелепипеде $\{a \le u \le b, c \le v \le d, e \le w \le f\}$; указывается зависимость $F(u,v,w)$ от первой переменной u при каждом из заданных попарно различных наборов (v_i, w_j) значений остальных двух переменных v, w $(i=\overline{0,l};\ j=\overline{0,m})$.

Введем $x = ru - q\ (-1 \le x \le 1)$. Получим

$$\varphi(x,v,w) = F(u,v,w),\ r = \frac{2}{b-a}, q = \frac{b+a}{b-a}.$$

Для каждого $k=\overline{0,n+1}$ построим для функции $\varphi\left(\eta_k^{(n)}, v, w\right)$; $x = \eta_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}\left(k=\overline{0,n+1}\right)$ интерполяционный полином

$$H_k^{(n)}(v,w) = \sum_{j=0}^{m} {}^k\alpha^j(v) w^j = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{l} {}^k\alpha_i^j v^i\right) w^j.$$

Коэффициенты ${}^k\alpha_i^j$ $(i=\overline{0,l};\ j=\overline{0,m})$ этого полинома единственным образом определятся из системы $(l+1)(m+1)$ билинейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{m} {}^k\alpha^j(v_p) w_q^j = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{l} {}^k\alpha_i^j v_p^i\right) w_q^j = \varphi\left(\eta_k^{(n)}, v_p, w_q\right), \quad (p=\overline{0,l}; q=\overline{0,m}).$$

Она равносильна матричному уравнению

$$\mathbf{V}\mathbf{A}_\mathbf{k}\mathbf{W}_\text{т} = \mathbf{\Phi}_\mathbf{k},$$

$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \left[{}^k\alpha_i^j\right]_{i=0,1,\cdots,l}^{j=0,1,\ldots,m}$, $\mathbf{V} = \left[v_p^q\right]_{p=0,1,\ldots,l}^{q-0,1,\ldots,m}$ (вандермондова матрица q-х степеней от v_p, $\mathbf{W}_\text{т} = \left[w_q^h\right]_{h=0,1,\ldots,m}^{q=0,1,\ldots,m}$ (транспонированная вандермондова матрица h-х степеней от w_q),

$\mathbf{\Phi}_\mathbf{k} = \left[\varphi\left(\eta_k^{(n)}, v_p, w_q\right)\right]_{p=0,1,\ldots,l}^{q-0,1,\ldots,m}$.

Справедливо

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}_\mathbf{k}\mathbf{W}_\text{т}^{-1},\ k=\overline{0,n+1}.$$

Напомним о некорректности решения задач, основанного на обращении матриц: иногда целесообразнее определение коэффициентов ${}^k\alpha_i^j$ другими методами.

Для каждой фиксированной пары (v,w) значений переменных v,w можно построить для функции $\varphi(x,v,w)$ асимптотический полином $H^{(n)}(x,v,w)$ степени n:

$$H^{(n)}(x,v,w)=b_0(v,w)T_0(x)+\sum_{p=1}^{n}b_p(v,w)T_p(x),$$

$$b_0(v,w)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}{}^{/}\varphi\left(\eta_k^{(n)},v,w\right),$$

$$b_p(v,w)=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}{}^{/}\varphi\left(\eta_k^{(n)},v,w\right)T_p\left(\eta_k^{(n)}\right)\quad p=\overline{1,n};$$

$T_p(x)=\cos(p\arccos x)$ - полиномы Чебышева первого рода, в частности,

$$T_0(x)=1,T_1(x)=x,T_2(x)=2x^2-1,T_3(x)=4x^3-3x,\dots;$$

$$T_{p+1}(x)=2xT_p(x)-T_{p-1}(x)\ \ (p=1,2,...);\ \eta_k^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{n+1}\ \ (k=\overline{0,n+1});$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}{}^{/}a_k=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{a_{n=1}}{2}.$$

По предыдущему легко получим аппроксимационный полином:

$$Q^{(n)}(x,v.w)=c_0(v,w)T_0(x)+\sum_{p=1}^{n}c_p(v.w)T_p(x);$$

$$c_0(v,w)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}{}^{/}\sum_{j=o}^{m}\sum_{i=0}^{l}{}^{k}\alpha_i^j v^i w^j\ ,$$

$$c_p(v,w)=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}{}^{/}\sum_{j=o}^{m}\sum_{i=0}^{l}{}^{k}\alpha_i^j T_p\left(\eta_k^{(n)}\right)v^i w^j\ \left(p=\overline{1,n}\right).$$

Можно показать, значения $T_p\left(\eta_j^{(n)}\right)$ при n=1,2,3,... являются элементами матриц:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\dots$$

соответственно.

Как видим, предлагаемая аппроксимация обладает простотой практической реализации.

Рассмотрим далее случай функций F большего числа переменных; в ряде случаев предварительно можно выявить не более трех наиболее важных факторов. Ограничимся случаем $F = F(y, m, z, p, n, k)$, когда по представленной информации можно выделить переменные m, z, k, принимающие только два значения (нижний и верхний уровни) [3]:

$$m_0 = \frac{m_н + m_в}{2},\ z_0 = \frac{z_н + z_в}{2},\ k_0 = \frac{k_н + k_в}{2};$$

$$I_m = m_в - m_0,\ I_z = z_в - z_0,\ I_k = k_в - k_0;$$

$$\tilde{m} = \frac{m - m_0}{I_m},\ \tilde{z} = \frac{z - z_0}{I_z},\ \tilde{k} = \frac{k - k_0}{I_k}.$$

Примем (табл.1):

$$m_н = 0{,}15,\ m_в = 0{,}4;\ z_н = 20,\ m_в = 35;\ k_н = 0,\ k_в = 32;$$

$$m_0 = 0{,}275,\ \ I_m = 0{,}125;\ z_0 = 27{,}5,\ I_z = 7{,}5;k_0 = 16,\ \ I_k = 16;$$

$$\tilde{m}_н, \tilde{z}_н, \tilde{k}_н = -1,\ \ \tilde{m}_в, \tilde{z}_в, \tilde{k}_в = +1,$$

$$\tilde{m}_0, \tilde{z}_0, \tilde{k}_0 = 0.$$

Интерполяционная модель принимается в виде:

$$F = a_0(y, p, n) + a_m(y, p, n)m + a_z(y, p, n)z + a_k(y, p, n)k$$

Таблица 1. Матрица планирования

№ опыта	m	z	k	$F(y, p, n)$
1	0,15	20	0	F_1
2	0,4	20	0	F_2
3	0,15	35	0	F_3
4	0,4	35	0	F_4
5	0,15	20	32	F_5
6	0,4	20	32	F_6
7	0,15	35	32	F_7

8	0,4	35	32	F_8

Или

$$F\left(y,\tilde{m},\tilde{z},p,n,\tilde{k}\right)=\tilde{a}_0(y,p,n)+\tilde{a}_m(y,p,n)\tilde{m}+\tilde{a}_z(y,p,n)\tilde{z}+\tilde{a}_k(y,p,n)\tilde{k};$$

$$\tilde{a}_0(y,p,n)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}F_i(y,p,n),$$

$$\tilde{a}_m(y,p,n)=\frac{1}{8}\left[(F_2+F_4+F_6+F_8)-(F_1+F_3+F_5+F_7)\right],$$

$$\tilde{a}_z(y,p,n)=\frac{1}{8}\left[(F_3+F_4+F_7+F_8)-(F_1+F_2+F_5+F_6)\right],$$

$$\tilde{a}_k(y,p,n)=\frac{1}{8}\left[(F_5+F_6+F_7+F_8)-(F_1+F_2+F_3+F_4)\right].$$

Будем иметь

$$F(y,m,z,p,n,k)\approx a_0+a_m m+a_z z+a_k k;$$

$$a_0=\tilde{a}_0(y,p,n)-\frac{m_0}{I_m}\tilde{a}_m(y,p,n)-\frac{z_0}{I_z}\tilde{a}_z(y,p,n)-\frac{k_0}{I_k}\tilde{a}_k(y,p,n),$$

$$a_m=\frac{1}{I_m}\tilde{a}_m(y,p,n),\ a_z=\frac{1}{I_z}\tilde{a}_z(y,p,n),\ a_k=\frac{1}{I_k}\tilde{a}_k(y,p,n).$$

Коэффициенты модели при фиксированных значениях p и n являются функциями одной переменной y (табл. 2).

Таблица 2. Значения коэффициентов (p =40, n=20).

y	0,5	0,7	1,0	1,1
a_0	0,0697	0,0620	0,0543	0,0354
a_m	0,0100	0,00650	0,0110	0,0380
a_z	-0,00063	-0,00036	0,00025	0,0013
a_k	0,00033	0,000707	0,00128	0,00136

После аппроксимации полиномами Лагранжа коэффициентов $a_0(y),a_m(y),a_z(y),a_k(y)$ получим:

$$F=a_0(y)+a_m(y)m+a(y)_z z+a_k(y)k,$$

$$a_0(y) = -0{,}73y^3 + 1{,}63y^2 - 1{,}2y + 0{,}354,$$

$$a_m(y) = 0{,}954y^3 - 2{,}03y^2 + 1{,}38y - 0{,}292,$$

$$a_z(y) = 0{,}033y^3 - 0{,}0712y^2 + 0{,}0509y - 0{,}0124,$$

$$a_k(y) = -0{,}00471y^3 + 0{,}0104y^2 - 0{,}00547y + 0{,}00105.$$

Возможно уточнение модели с учетом эффектов взаимодействия (табл.3) в виде:

$$F = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_m\tilde{m} + \tilde{a}_z\tilde{z} + \tilde{a}_k\tilde{k} + \tilde{a}_{mz}\tilde{m}\tilde{z} + \tilde{a}_{mk}\tilde{m}\tilde{k} + \tilde{a}_{kz}\tilde{k}\tilde{z}.$$

Таблица 3. Значения коэффициентов при p =25 и n=20.

y	0,3	0,5	0,8	1,0
$\tilde{a}_0$	0,0368	0,0392	0,0570	0,0840
$\tilde{a}_m$	0,00025	-0,00025	-0,0015	0,0010
$\tilde{a}_z$	-0,00425	-0,00325	-0,0025	0,0015
$\tilde{a}_k$	0,00225	0,00575	0,0125	0,0170
$\tilde{a}_{mz}$	0,00225	0,00225	0,00175	0,0065
$\tilde{a}_{mk}$	0,00075	0,00025	0,00025	0
$\tilde{a}_{zk}$	0,00025	0,00025	0	0,0005

Здесь при фиксированных значениях p и n с использованием матрицы планирования получится аппроксимация функции $F = F(y, m, z, p, n, k)$, как функции четырех переменных.

В частности, при p=0, n=20 на основе полиномов Лагранжа второго порядка были получены аппроксимационные модели вида:

$$\tilde{a}_0 = 0{,}541y^2 - 0{,}514y + 0{,}125,$$

$$\tilde{a}_m = 0{,}148y^2 - 0{,}156y + 0{,}034,$$

$$\tilde{a}_z = 0{,}104y^2 + 0{,}0965y + 0{,}018,$$

$$\tilde{a}_k = -0{,}0072y^2 + 0{,}00272y - 0{,}0056,$$

$$\tilde{a}_{mz} = 0{,}0221y^2 - 0{,}0175y + 0{,}0049,$$

$$\tilde{a}_{mk} = 0,0246y^2 - 0,0268y + 0,0057,$$

$$\tilde{a}_{zk} = 0,0171y^2 - 0,019y + 0,0043.$$

Указанная аппроксимация эффективно использовалась при разработке материалов по кинетическим процессам формирования их физико-механических характеристик, а также при интегрировании уравнений движения нестационарных нелинейных систем с последовательным уточнением на каждом шаге начальных условий задачи Коши [4,5].

Библиографический список

1. Гусев Б.В., Королев Е.В., Гришина А.Н. Модели полидисперсных систем: критерии оценки и анализ показателей эффективности /Промышленное и гражданское строительство. - 2018. - № 8. - С. 31-39.
2. Данилов А.М., Гарькина И.А. Асимптотические полиномы в смысле И.И.Этермана при аналитическом описании экспериментальных данных / Региональная архитектура и строительство. - 2012.- № 3. - С. 70-78.
3. Гарькина И.А., Данилов А.М., Прошин А.П., Соколова Ю.А. Планирование эксперимента. обработка опытных данных (монография) / - Москва: ПАЛЕОТИП. – 2005. – 272 с.
4. Максимова И.Н., Макридин Н.И., Королев Е.В. Сравнительный анализ кинетических зависимостей на ранних и поздних стадиях процессов структурообразования конструкционной прочности цементных композитов / Региональная архитектура и строительство. -2018.- № 2 (35). - С. 5-12.
5. Бормотов А.Н., Бормотова А.А. Интегрированный комплекс математического моделирования и многокритериального синтеза композиционных материалов / Региональная архитектура и строительство. - 2018. - № 3 (36). - С. 97-103.

Оригинальность 80%