УДК 517.9

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Данилов А.М.

д.т.н., профессор

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Пенза, Россия

Гарькина И.А.

д.т.н., профессор

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Пенза, Россия

Аннотация. Производится качественный анализ важного для практики одного класса нелинейных динамических систем. Особое внимание уделяется объективизации оценки оператором динамических характеристик объекта по синхронным измерениям фазовых координат в процессе нормального функционирования. Результаты прошли апробацию при разработке тренажных и обучающих комплексов транспортных систем.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, качественный анализ, транспортные системы, объективизация оценки качества

QUALITATIVE ANALYSIS OF ONE CLASS NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM

Danilov A.M.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia

Garkina I.A.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia

Annotation. A qualitative analysis of a class of nonlinear dynamic systems important for the practice is carried out. Special attention is paid to the objectification by the operator of the assessment of the dynamic characteristics of the object from synchronous measurements of the phase coordinates in the process of normal operation. The results have been tested in the development of training and training complexes of transport systems.

Keywords: nonlinear dynamic systems, qualitative analysis, transport systems, objectification of quality assessment

В приложениях сложные нелинейные системы и/или их математические модели обычно заменяют линейными без соответствующих оценок. Ясно, что при такой замене погрешности могут оказаться значительными, что не только количественные характеристики, но даже качественное поведение реальной и аппроксимирующей систем могут оказаться далекими от адекватных [1…4]. Поэтому требуется предварительные, хотя бы качественные оценки такой замены. Проиллюстрируем указанное на примере важной для практики задачи по проектированию динамической системы, описываемой нелинейной системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{y}(t) = f\left(t, y(t), u(t)\right), t \in [t_0, T],$$

$$y(t_0) = y_0;$$

$y(t) \in R^n$ и $u(t) \in R^m$ - траектория объекта управления и управляющее воздействие соответственно. Проведем сравнение с системой вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + g(t), t \in [t_0, T]$$

$$x(t_0) = x_0;$$

A, B - некоторые постоянные матрицы, $g(t)$ - некоторая функция.

Можно ожидать близость численных решений, описывающих движение почти стационарных систем. Возможность линейной аппроксимации исследуемой системы следует из теорем о непрерывной зависимости решения системы от параметров и возможности линейной аппроксимации непрерывных функций. Правда, здесь речь идет лишь о локальной аппроксимации. На этом основаны многие надежные численные методы решения ДУ; непрерывную функцию можно аппроксимировать в некоторой окрестности линейной только с требуемой точностью. Возникает вопрос о погрешностях при глобальной аппроксимации. С увеличением размерности системы естественно в общем случае будут возрастать и погрешности. Ограничимся системами второго порядка. Справедливо:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)(Bu(s) + g(s)) ds,$$

$\Phi(t, s)$ - фундаментальная матрица ($c_{ij} s^{k_j} e^{\lambda_j (t-s)}$ - столбцы; k_j - натуральные числа; не превосходят кратности соответствующих собственных чисел λ_j матрицы $\mathbf{A}$) решения системы

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A} x(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Погрешности можно оценить по изменению характеристических чисел λ_j при изменении коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$. Для системы второго порядка

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \;;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_1 = trA, \;\; \lambda_1 \lambda_2 = a_0 = \det A.$$

Если $\lambda_1' = \lambda_1 + \varepsilon$, $\lambda_2' = \lambda_2 - \varepsilon$ есть собственные числа некоторой матрицы $\mathbf{A}'$ (ε может быть как действительным, так и комплексным), то :

$$\lambda_1' + \lambda_2' = \lambda_1 + \lambda_2; \; tr\mathbf{A}' = tr\mathbf{A},$$

$$\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A} + \varepsilon(\lambda_2 - \lambda_1 - \varepsilon).$$

Даже при практическом совпадении **A** и **A′** (значение $\lambda_2 - \lambda_1 - \varepsilon$ мало) Собственные числа **A** и **A′** (определяют поведения решений) могут существенно отличаться даже при практическом совпадении **A** и **A′** ($\lambda_2 - \lambda_1 - \varepsilon$ мало). Так, при $\lambda_1 = -0{,}7$, $\lambda_2 = -0{,}5$; $\lambda_1' = -0{,}6, \lambda_2' = -0{,}6$ ($|a_{12} - a_{12}'| = 0{,}01$) общие решения

$$x(t) = C_1 e^{-0,7(t-t_0)} + C_2 e^{-0,5(t-t_0)},$$
$$x(t) = (C_1 + C_2(t - t_0))e^{-0,6(t-t_0)}$$

отличаются даже по структуре. Изменение a_{12} всего на 0,01 колебательную систему приводит к апериодической.

Известно, в имитаторах динамики полета транспортного самолета короткопериодическая составляющая продольного движения описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. Из приведенного выше следует, что аппроксимация уравнений движения эргатической системы «оператор-объект управления» линейной системой возможна, но требует проверки в каждом конкретном случае (не исключается использование при практическом синтезе в качестве нулевого приближения).

Если эргатическая система описывается уравнениями движения

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + f(t)$$

($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{т}}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^{\text{т}}$ - вектор управления, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_s(t))^{\text{т}}$ - возмущающие воздействия), то для оценки оператором качества объекта управления можно использовать функционал [5]

$$\Phi(\mathbf{S}) = -a\frac{1}{\max\limits_i \alpha_i} + b\max_i\left|\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right| + c\max_i|\beta_i|, \ \Phi(S) \le k,$$

$\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ - корни характеристического полинома; a, b, c - весовые константы, k - класс объекта в заданной *N*-балльной шкале. К сожалению, полученные оценки в значительной степени зависят от выбранных весовых констант (определялись операторами-экспертами). Использовался и иной подход, основанный на объективизации оценок качества объекта по десятибалльной шкале Купера-Харпера [6].

Объекты с матрицами

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}609 & -0{,}0682 \\ 1 & -0{,}0092 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}723 & -0{,}14 \\ 1 & -0{,}0167 \end{bmatrix}$$

в уравнении движения принадлежат классу 3 (оценки по шкале Купера-Харпера - 2,5), а объект, которому соответствует матрица

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0{,}355 & -0{,}0383 \\ 1 & -0{,}0087 \end{bmatrix},$$

принадлежит классу 4 (оценка по шкале Купера-Харпера - 3,5).

Для первой системы S_1 имеем:

$\sigma = -0{,}624$, $\Delta = 0{,}077$; $\lambda_1 = -0{,}168$, $\lambda_2 = -0{,}456$ (σ - след матрицы $\mathbf{A}$; $\Delta = |\mathbf{A}|$).

Справедливо $\Phi(S_1) = \dfrac{a}{0{,}168} = 2{,}5$; откуда $a \approx 0{,}4$.

Для S_2: $\sigma = -0{,}74$; $\Delta = 0{,}152$; $\lambda_{1,2} = -0{,}37 \pm 0{,}123j$;

$$\Phi(S_2) = \frac{0{,}4}{0{,}37} + b\frac{0{,}1123}{0{,}37} + c \cdot 0{,}123 = 2{,}5.$$

Для системы S_3: $\sigma = -0{,}364$, $\Delta = 0{,}0414$; $\lambda_{1,2} = -0{,}182 + 0{,}1j$;

$$\Phi(S_3) = \frac{0{,}4}{0{,}182} + b\frac{0{,}1}{0{,}182} + c \cdot 0{,}1 = 3{,}5.$$

Тогда $b \approx 0{,}8$; $c = 10$.

На рис.1 приводятся области равных оценок для характеристик объекта при весовых константах $a = 0{,}4$, $b = 0{,}8$, $c = 10$.

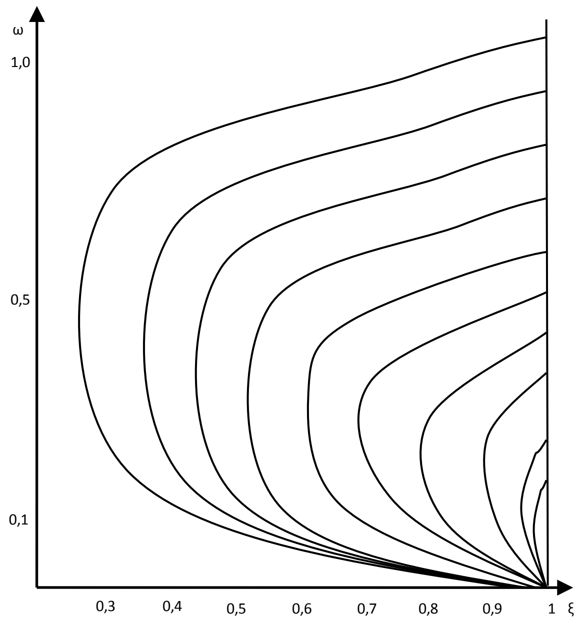

Рис.1 Границы *Ф(S) = d* областей равных оценок характеристик объекта

Функционал использовался для объективизации экспериментальных оценок объектов по шкале Купера-Хапера [5, 6].

Библиографический список:

1. Газин А.И. К вопросу о моделировании сложных систем / А.И.Газин, А.А.Гущина, Э.В.Лапшин, Б.К.Кемалов // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». - 2009. - Т. 1. - С. 339-340.
2. Алмаметов В.Б. Реализация обучающих связующих стратегий в компьютерной обучающей системе / В.Б.Алмаметов, Н.К.Юрков, В.А.Трусов // Современные наукоемкие технологии. - 2014. - № 5-1. - С. 14-15.
3. Годунов А.И. Методика и алгоритмы оптимизации сложных систем со стохастической структурой /А.И. Годунов, А.А.Баранов, А.З.Байсанов //

Труды международного симпозиума «Надежность и качество». - 2017. -Т. 1. - С. 23-28.

4. Сапунов Е.А. Методика моделирования имитатора акселерационных воздействий / Е.А.Сапунов, И.А.Прошин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2011. - Т. 13.- № 1-2. - С. 334-336.
5. Данилов А.М. Метод пробных воздействий при идентификации продольного движения / А.М.Данилов, И.А.Гарькина // Дневник науки. - 2017. - № 10 (10). - С. 13.
6. Гарькина И.А. Количественная оценка характеристик объекта по управляемости /И.А.Гарькина, А.М.Данилов, Я.И.Сухов //Современные проблемы науки и образования. - 2015. - № 1-1. - С. 56.

Оригинальность 95%