УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Канунникова К.А.

Студентка

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

Магнитогорск, Россия

Иванова Е.В.

Студентка

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

Магнитогорск, Россия

Москвина Е.А.

Доцент

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

Магнитогорск, Россия

Аннотация

В математике дифференциальные уравнения имеют немаловажное значение. Математическое исследование самых разнообразных явлений, происходящих в природе, часто приводит к решению начально-краевых задач, в основе которых находятся такие уравнения, поскольку сами законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде дифференциальных уравнений. Широкое применение также нашли дифференциальные уравнения при решении задач в разных областях знания: экономике, медицине, физике, химии и др. Так например дифференциальное уравнение Риккати, которое на сегодняшний день является недостаточно глубоко изученным, занимает особое место в математике. Методы его численного решения имеют важное значение для задачи синтеза регулятора, а также для задачи оценки состояния. Поэтому цель данной статьи - исследовать теоретические основы дифференциального уравнения Риккати, выявить методы его решения и осуществить численную реализацию.

Ключевые слова: вектор, дифференциальное уравнение, комплексные числа, матрица, метод, постоянная, уравнение Риккати, численное решение.

NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF RIKKATI

Kanunnikova K.A.

Student

Federal State Budgetary Establishment of Higher Professional Education

Magnitogorsk State Technical University G.I. Nosova

Russia, Magnitogorsk

Ivanova E.V.

Student

Federal State Budgetary Establishment of Higher Professional Education

Magnitogorsk State Technical University G.I. Nosova

Russia, Magnitogorsk

Moskvina E.A.

Docent

Federal State Budgetary Establishment of Higher Professional Education

Magnitogorsk State Technical University G.I. Nosova

Russia, Magnitogorsk

Abstract

In mathematics the differential equations have important value. Mathematical study of a wide variety of phenomena occurring in nature, often leads to the solution of such equations, because the laws themselves, which are subject to certain phenomena, are written in the form of differential equations. Broad application was found by the differential equations at the solution of tasks in different areas of knowledge: to economy, medicine, physics, chemistry etc. So for example the differential equation of Rikkati which is insufficiently deeply studied today holds a specific place in mathematics. Methods of its numerical decision are important for a problem of synthesis of the regulator and also for a problem of assessment of a state. Therefore the purpose of this article - to investigate theoretical bases of the differential equation of Rikkati, to reveal methods of his decision, in particular numerical.

Keywords: vector, differential equation, complex numbers, matrix, method, constant, equation of Rikkati, numerical decision

Первоначально исследованием уравнения Риккати и поиском его решения занимались итальянские математики Якопо Франческо Риккати и семейство Бернулли. В 1724 году Риккати опубликовал в известном в то время журнале статью, приуроченную к методам разделения переменных и методам понижения порядка дифференциальных уравнений. После чего в этом же журнале вышла статья Даниила Бернулли, который писал, что их семья исследовала данное уравнение, и что каждый независимо друг от друга нашел условие на параметр n, при которых это уравнение допускает разделение переменных. Впоследствии, между математиками возникло недопонимание, и Риккати отказался от спора, пояснив, что он не хотел бросать вызов семье Бернулли. И более об этом уравнении никто ничего не написал.

Уравнение Риккати — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, общий вид которого представлен следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

где $a(x), b(x), c(x) -$ заданные непрерывные функции, зависящие от переменной x.

Данное уравнение невозможно свести к конечному числу последовательных интегрирований для нахождения решений. Но согласно теореме существования решений дифференциальных уравнений, оно содержит решение при любом начальном условии вида $x(t_0) = x_0$, где точка $t = t_0$ принадлежит отрезку непрерывности функций *a(x), b(x)* и *c(x).*

Уравнение Риккати также имеет частный случай (специальное уравнение Риккати):

$$b\frac{dy}{dx} = y^2 + ax^n,$$

где n , a , b $\neq 0$— постоянные. Данный вид уравнения допускает разделение переменных и, следовательно, интегрирование в квадратурах при условии:

$$n = \frac{4\,k}{1-2k}\ ,\ k \in N\,,\ k \to \infty \text{ или } n = -\,2.$$

Кроме специального уравнения Риккати, имеется большое количество других частных случаев уравнения с коэффициентами *a(x), b(x), c(x)* определенного вида. Большинство из этих частных случаев имеют интегрируемые решения.

Нужно отметить, что общее решение можно построить, если установлено одно из частных решений. Для нахождения частного решения, зависящего от вида функций *a(x), b(x)* и *c(x)*, не существует строгого алгоритма. Выделим некоторые частные случаи:

1) если коэффициенты в уравнении Риккати постоянны, то уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными. В этом случае

общее решение описывается интегралом от рациональной функции с квадратичным трехчленом в знаменателе:

$$\frac{dy}{dx} = ay + by^2 + c,$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ay + by^2 + c} = dx,$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{ay + by^2 + c} = \int dx.$$

Этот интеграл легко вычисляется при любых значениях a, b и c;

2) Уравнение вида вида $\frac{dy}{dx} = by^2 + cx^n$ в котором функция $a(x)$ при линейном члене равна нулю, коэффициент b при y^2 является константой, а c(x) является степенной функцией: $a(x) \equiv 0, b(x) = b, c(x) = cx^n$. Данный случай уравнения Риккати имеет замечательные решения.

- если n=0, то мы снова приходим к первому случаю, в котором переменные разделяются, и уравнение можно проинтегрировать.
- Если n=–2, то уравнение Риккати преобразуется в однородное уравнение с помощью подстановки $y = \frac{1}{z}$ и далее также допускает интегрирование.

Данное дифференциальное уравнение можно также решить при

$$n = \frac{4k}{1 - 2k}, \text{ где } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

В данном случае общее решение выражается через цилиндрические функции [8]. При всех иных значениях степени n решение уравнения Риккати можно выразить через интегралы от элементарных функций [10]. Данный факт был определен в 1841 году французским математиком Джозефом Лиувиллем. Он выяснил, что решение специального уравнения Риккати не может быть представлено в виде интегрирования элементарных функций, если n не удовлетворяет условию (4).

Перейдем к рассмотрению методов численного решения уравнения Риккати, и опишем теоретически каждый из них:

- Прямой метод интегрирования - основан на представлении уравнения

$-P(t) = R_1(t) - P(t)B(t)R_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t),$ (*)

с конечным условием

$$P(t_1) = P_1$$

в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и использовании любого стандартного численного метода интегрирования уравнений в обратном времени, начиная с момента t_1. Наиболее простым методом численного интегрирования является метод Эйлера

$$P(t - \Delta t) \simeq P(t) - P(t)\Delta t,$$

по которому вычисляется матрица в моменты $t = t_1 - \Delta t,\ t_1 - 2\Delta t\ldots$

Недостатком этого метода является то, что для обеспечения достаточной точности обычно требуется весьма малая величина, приводящая к большому числу шагов. Кроме того, из-за ошибок вычислений нарушается симметрия матрицы , что можно устранить путем симметрирования после каждого шага [9], т. е. путем замены. Симметрию матрицы можно использовать, заменяя уравнение (*) системой дифференциальных уравнений первого порядка и получая в результате существенную экономию машинного времени.

Метод прямого интегрирования применим к системам с переменными и постоянными параметрами. Этот метод обычно приводит к неудовлетворительным результатам, однако интегрирование уравнения Риккати (*) в прямом направлении неустойчиво, что вызывает возрастающие со временем ошибки вычислений

- Метод Калмана-Энглара. Решение уравнения Риккати тогда находится путем многократного использования выражения
- $P(t_{i+1}) = [\theta_{21}(t_{i+1}, t_i) + \theta_{22}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)] * [\theta_{11}(t_{i+1}, t_i) + =$
  $+\theta_{12}(t_{i+1}, t_i)P(t_i)]^{-1}$, где $t_{i+1} = t_1 - \Delta t,$

При этом после каждого шага целесообразно проводить симметрирование.

Если интервал выбран слишком большим, то возникает трудности вычислений, обусловленные не сингулярностью матрицы [6]. Однако время вычислений при этом может быть большим, особенно если исследуется установившееся решение.

- Метод диагонализации.

Асимптотическое решение определяется выражением [4]:

$$\mathrm{P} = W_{22} W_{12}^{-1}$$

Обычно некоторые или все собственные векторы матрицы могут быть комплексными. Операции с комплексными числами можно избежать, если собственный вектор, соответствующий характеристическому числу с отрицательной вещественной частью, то комплексно-сопряженный вектор также является собственным вектором, соответствующим характеристическому числу с отрицательной вещественной частью, а последние столбцов матрицы будут содержать кроме вещественных векторов только комплексно-сопряженные пары вектор-столбцов. В этом случае всегда можно выполнить несингулярное линейное преобразование [2], про котором каждая пара комплексно-сопряженных вектор-столбцов заменяется на два вещественных вектора.

Эффективность этого метода зависит от эффективности подпрограммы вычисления собственных векторов матрицы [7].

- Метод Ньютона – Рафсона

Метод основан на многократном решении линейного матричного уравнения вида

$$0 = A^T P + PA + R,$$

Установившееся решение [11] P уравнения Риккати, должно удовлетворять алгебраическому уравнению Риккати

$$0 = R_1 - pSP + A^T P + PA,$$

Где

$$S = BR_2^{-1}B^T$$

Суть метода Ньютона — Рафсона заключается в оценке Р [1], когда правая часть выражения

$$F(\dot{P}) \simeq R_1 - P_k S P_k - P_k S\acute{P} - \acute{P} S P_k + A^T\left(P_k + \acute{P}\right) + \left(P_k + \acute{P}\right)A, (***)$$

приравнивается к нулю.

Основные трудности в этом методе [3] связаны с уравнением

$$0 = A^T P + PA + R,$$

которое должно решаться многократно. Хотя это уравнение является линейным, его численное решение [5] может оказаться трудоемким, так как число линейных уравнений, которые должны решаться на каждой итерации, быстро возрастает с увеличением размерности.

Биографический список:

1. Березин И.С. Методы вычислений /И.С. Березин, Н.П. Жидков –М., 2015.- 620 с.
2. Долгополов Д.В. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц /Д.В. Долгополов - Санкт-Петербург, 2015 - 220 с.
3. Козин Р.Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация / Р.Г. Козин. - Москва. - 2012. - 124 с.
4. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция / С.Е. Михеев. - С.-Петерб. - 2012. - 59 с.
5. Михеев С.Е. Численные методы / С.Е. Михеев.- СПб.: СПбГУ. - 2013. - 93 с.
6. Тарасов В.Н, Бахарева Н.Ф. Численные методы. Теория. Алгоритмы. Программы. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2008.- Т.19. - №2 – С – 36-43.
7. Тарасов В.Н, Бахарева Н.Ф. Численные методы. Теория. Алгоритмы. Программы. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2008.- Т.19. - №2 – С – 36-43.

8. Торшина О.А. О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Челябинский физико-математический журнал. - 2003. - Т. 3. - № 3 (9). - С. 178-191.
9. Торшина О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа – Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости / О.А. Торшина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. - 2006. - № 4. - С. 32-40.
10. Торшина О.А. Формула регуляризованного следа дифференциального оператора со сложным вхождением спектрального параметра / О.А. Торшина // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2003. - Т. 8. - № 3. - С. 467-468.

Оригинальность 72%