УДК 517.9

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ФУНКЦИЕЙ ХЭВИСАЙДА

Иванова Е. В.
Студент 4 курса института естествознания и стандартизации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова,
Магнитогорск, Россия

Однорожникова С.И.
Студент 4 курса института естествознания и стандартизации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова,
Магнитогорск, Россия

Канунникова К.А.
Студент 4 курса института естествознания и стандартизации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова,
Магнитогорск, Россия

Аннотация. В различных сферах человеческой деятельности возникает необходимость решения прикладных задач, в основе которых лежат краевые задачи. При решении начально-краевых задач целесообразно использовать асимптотические методы. При этом на точность расчетов влияют как основные, так и вспомогательные факторы. При учете только основных факторов решение получается не точное, а при добавлении дополнительных возникают проблемы в вычислениях. В этом случае рассматривается асимптотическое решение, которое дает возможность вычислить с необходимой точностью поставленную задачу. При асимптотическом вычислении некоторых краевых задач мембранной электрохимии возникают уравнения с частными производными, в которых можно заметить члены, зависящие от знака искомой функции и записывающиеся с использованием функций Хэвисайда. Добавление в линейные уравнения с частными производными членов с функцией Хэвисайда приводит к новому классу квазилинейных уравнений, которые отличаются от класса линейных уравнений, но имеют сходства по свойствам. Краевые задачи для данного класса квазилинейных уравнений на данный момент времени недостаточно исследованы. В данной статье рассматривается численное решение краевой задачи для уравнения параболического типа с функцией Хэвисайда.

Ключевые слова: граничные условия, дискретизация, дифференциальные уравнения, квазилинейные уравнения, начальные условия, функция Хэвисайда.

THE SOLUTION TO THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC TYPE EQUATION WITH THE HEAVISIDE FUNCTION

Ivanova E. V.
4th year student of the Institute of natural Sciences and standardization
Federal state budgetary educational institution of higher education Magnitogorsk state technical University. G. I. Nosov
Magnitogorsk, Russia

Odnorozhnikova S. I.
4th year student of the Institute of natural Sciences and standardization
Federal state budgetary educational institution of higher education Magnitogorsk state technical University. G. I. Nosov
Magnitogorsk, Russia

Kanunnikova K. A.
4th year student of the Institute of natural Sciences and standardization
Federal state budgetary educational institution of higher education Magnitogorsk state technical University. G. I. Nosov
Magnitogorsk, Russia

Abstract. In various spheres of human activity there is a need to solve applied problems, which are based on the boundary value problems. When solving initial boundary value problems, it is advisable to use asymptotic methods. At the same time, the accuracy of the calculations is influenced by both main and auxiliary factors. Taking into account only the main factors, the solution is not accurate, and adding additional problems in the calculations. In this case, we consider the asymptotic solution, which makes it possible to calculate the problem with the necessary accuracy. In the asymptotic calculation of some boundary value problems of membrane electrochemistry, partial differential equations arise, in which one can notice the terms depending on the sign of the desired function and written using the Heaviside functions. Adding terms with the Heaviside function to linear partial differential equations leads to a new class of quasi-linear equations that differ from the class of linear equations but have similarities in properties. The boundary value problems for this class of quasi-linear equations are not sufficiently investigated at the moment. This article discusses the numerical solution of the boundary value problem for the parabolic type equation with the Heaviside function.

Keywords: boundary condition, sampling, differential equation, quasilinear equations, entry conditions, Heaviside function**.**

Введение

Рассмотрим квазилинейные уравнения параболического типа с функцией Хэвисайда [1]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda \Delta S - \chi(S) div\left(\tilde{S}\vec{V}\right), t > 0, x \in (0,1), y \in (0, L) \text{ ,}$$

а также краевые условия:

1) граничные условия:

$$S|_{x=0}=A(t,y)<0,\ S|_{x=L}=B(t,y)<0,\ S|_{y=0}=C(t,x),\ S|_{y=L}=D(t,x),$$

2) начальные условия

$$S|_{x=0}=S_0(x,y)$$

3) условия согласования граничных условий [3]:

$$C(t,0)=A(t,0)<0;\ C(t,1)=B(t,0);\ D(t,0)=A(t,L)<0;\ D(t,1)=B(t,L)$$

4) условия согласования граничных и начальных условий:

$$S_0(0,y)=A(0,y);\quad S_0(1,y)=B(0,y);\ S_0(x,0)=C(0,x);\ S_0(x,L)=D(0,x);$$

Решим рассматриваемую начально-краевую задачу [5]. Для этого выполним ряд действий.

Основная часть

1) Квантование [6]. Область $U=\{(x,y,t)\in[0,1]x[0,L]x[0,\infty)\}$ разложим с шагом h_x, h_y и по времени с шагом $h_t=\tau$. Далее для упрощения решения рассмотрим частный случай, когда $h_x=h_y=h$. А также, будет применяться одинаковое обозначение для исходных функции, надлежащих им, разностных функций.

Затем введем четыре одномерных и три двумерных массива, которые соответствуют размерности:

$$N=\left[\frac{1}{h}\right]+1,\ M=\left[\frac{L}{h}\right]+1:\ A[M];\ B[N];\ C[N];\ D[N];\ S_0[N,M];\ S_p[N,M];\ S_n[N,M].$$

Рассчитаем массив A[M] по формуле A(j)=A(t,(j-1)h), j=1, t – фиксированное значение. Массивы B,C,D,S_0 находим подобным образом [2]. S на прошлом слое по времени запишем через S_p, а через S_n- на текущем слое по t.

2) Применяем явную схему из уравнения для i=2, N-1; j=2, M-1 найдем S_p , S_n.

Перейдем от дифференциальных уравнений к разностным [9], с помощью замены производных конечными разностями по формулам:

$$\frac{\partial S}{\partial t}\approx\frac{S_n(i,j)-S_p(i,j)}{\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(SV_1)\approx\frac{S_p(i+1,j)V_1(i+1,j)-S_p(i,j)V_1(i,j)}{h},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(SV_2)\approx\frac{S_p(i+1,j)V_2(i+1,j)-S_p(i,j)V_2(i,j)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\approx\frac{S_p(i+1,j)-2S_p(i,j)+S_p(i-1,j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\approx\frac{S_p(i,j+1)-2S_p(i,j)+S_p(i-1,j)}{h^2}$$

При подстановке в уравнение получим [10]:

$$\frac{S_n(i,\ j)-S_p(i,\ j)}{\tau}\approx\lambda\frac{S_p(i+1,j)-2S_p(i,j)+S_p(i-1,j)}{h^2}+$$

$$+\frac{S_p(i,j+1)-2S_p(i,j)+S_p(i,j-1)}{h^2}-\chi\left(S_p\right)\mathrm{div}_d\left(\frac{1}{h},S_p\right),$$

i=2, N-1;j=2, M-1,

в котором $div_d\left(\frac{1}{h},S_p\right)$ - дискретный оператор дивергенции, находится по формуле:

$$\mathrm{div_d}\left(\frac{1}{h},S_p\right)=\frac{S_p(i+1,j)V_1(i+1,j)-S_p(i,j)V_1(i,j)}{h}+$$

$$+\frac{S_p(i,j+1)V_2(i,j+1)-S_p(i,j)V_2(i,j)}{h},\ i=2,\ N-1;j=2,\ M-1.$$

Решим данные уравнения относительно $S_n(i,j)$, получим [7]: при i=2, N-1;j=2, M-1:

$$S_n(i,j)=S_p(i,j)+\lambda\frac{\tau}{h^2}\Big(S_p(i+1,j)-2S_p(i,j)+S_p(i-1,j)\Big)+$$

$$+\frac{\tau}{h^2}\Big(S_p(i,j+1)-2S_p(i,j)+S_p(i,j-1)\Big)-\chi\big(S_p\big)\mathrm{div_d}\left(\frac{\tau}{h},S_p\right),$$

где

$$\chi\big(S_p\mathrm{div_d}\big)\big(S_p\big)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ S_p(i,j\leq 0\\ \frac{\tau}{h}(S_p(i+1,j)V_1(i+1,j)-S_p(i,j)V_1(i,j)+\\ \frac{\tau}{h}\Big(S_p(i,\ j+1)V_2(i,\ j+1)-S_p(i,j)V_2(i,j)\Big),\ S_p(i,\ j)>0\end{cases}$$

3) Присваиваем значение на границах:

$$S_p(1,j)=A(j),\ j=1,\ M,\ \ S_p(N,j)=B(j),\ j=1,M,$$

$$S_p(i,1)=C(i),\ i=1,\ N,\ S_p(i,M)=D(i),\ i=1,N.$$

Запишем алгоритм численного решения [4]:

1) t=0, присвоение начальных значений:

$$S_p(i,j)=S_0(i,j),\ \text{где}\ S_0(i,j)=S_0\big((i-1)h,(j-1)h\big).$$

2) t=t+ τ, переходим на следующий слой, тогда:

a) вычисляем $S_n(i,j)$ при i=2, N-1;j=2, M-1. [8]

b) находим массивы A[M]; B[M]; C[N]; D[N] по формулам данные выше:

$$A(j)=A(t,(j-1)h),\ \ j=1,\ M,$$

$$B(j)=B(t,(j-1)h),\ \ j=1,\ M,$$

$$C(i)=C(t,(i-1)h),\ \ i=1,\ N,$$

$$D(i)=D(t,(i-1)h),\ \ i=1,\ N.$$

c) выводим график $S_n(i,j)$.

3) Рассмотрим достижения конечного времени t_k и сопоставим его [9]. Если $t < t_k$, то $S_p(i,j)= S_n(i,j)$, i=1, N; j=1, M, затем переход к шагу 2, иначе выход.

Выводы

1. слагаемое, которое включает функции Хэвисайда, значительно влияет на вычисление, потому что знак искомой функции может измениться, например, в механизме переноса. В задачах мембранной электрохимии это означает превалирование в различных частях области исследования уравнения с функцией Хэвисайда процессов диффузии или конвективного переноса. Учет этих особенностей допускает трансформирование схемы очистки воды в электродиализных аппаратах водоподготовки для парогенераторов АЭС и ТЭС;

2. применяя численные расчеты можно заметить, что явная схема оказывает автоматически регулярное воздействие на вычислении на линии разрыва члена с функцией Хэвисайда.

Библиографический список

1. Дубровский В.В., Торшина О.А. Дискретность спектра задачи Неймана // Вестник Магнитогорского государственного университета. 2004. - № 5. - с. 130-131.

2. Дубровский В.В., Торшина О.А. Об одной лемме спектральной теории оператора Штурма - Лиувилля // Проблемы науки и образования в современной высшей школе Тезисы докладов XXXVIII внутривузовской научной конференции преподавателей МаГУ. 2000. - С. 42-43.

3. Кадченко С.И., Торшина О.А. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных рядов // Вестник Южно-Уральского государственного

университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2016. - Т. 8. - № 2. - С. 36-43.

4. Кадченко С.И., Торшина О.А., Рязанова Л.С. Вычисление собственных чисел спектральной задачи Ора – Зоммерфельда // Современные наукоемкие технологии. – 2018. - № 8. - С. 89-94.

5. Михеев С. Е. Многомерная аппроксимация и интерполяция. С.-Петерб. 2012. 59 с.

6. Торшина О.А. О следе дифференциального оператора с потенциалом на проективной плоскости // Челябинский физико-математический журнал. 2003. Т. 3. № 3 (9). С. 178-191.

7. Торшина О.А. Существенный спектр задачи Неймана для оператора Лапласа // Современные проблемы науки и образования: материалы L внутривузовской научной конференции преподавателей МаГУ. – Магнитогорск: Издательство Магнитогорский государственный университет, 2012. - С. 271.

8. Торшина О.А. Формула асимптотики собственных чисел оператора Лапласа – Бельтрами с потенциалом на проективной плоскости // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции. 2003. - С. 258-259.

9. Торшина О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа – Бельтрами с негладким потенциалом на проективной плоскости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. 2006. - № 4. - С. 32-40.

10. Торшина О.А. Формула регуляризованного следа дифференциального оператора со сложным вхождением спектрального параметра // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2003г. - Т. 8. - № 3. - С. 467-468.

Оригинальность 77%