УДК 514.172.45

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОЭДРА С ТРЕУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

Абдуллин С.Р.
ст. преподаватель,
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
Москва, Россия
Лебедев С.В.
к. ф.-м.н, доцент,
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
Москва, Россия

Аннотация.
В работе рассматриваются вопросы построения выпуклых многогранников с равными плоскими гранями, т.н. равногранников или изоэдров; здесь показана возможность существования и описан способ построения изоэдра с равнобедренными треугольником в качестве плоской грани, а также доказана невозможность построения изоэдра с плоской гранью в виде неправильного треугольника кроме многогранника с топологической характеристикой (4,6,4).

Ключевые слова: выпуклые фигуры, многогранники, изоэдры, топологическая характеристика многогранника.

ON THE POSSIBILITY OF CONSTRUCTING AN ISOHEDRON WITH TRIANGULAR FACES

Abdullin S.R.
Senior teacher,
Moscow State Technical University N.E.Bauman
Moscow, Russia

Lebedev S.V.

Ph.D., Associate Professor,

Moscow State Technical University N.E.Bauman

Moscow, Russia

Annotation.

The work deals with the construction of convex polyhedra with equal planar faces, the so-called ravnopravno or isohedron; here are shown the possible existence of the described method of constructing soedra with an isosceles triangle as a flat face, and also proved the impossibility of building soedra a flat face in the form of an irregular triangle except polyhedra with the topological characteristics (4,6,4).

Keywords: convex shapes, polyhedra, isohedra, topological characteristic of a polyhedron.

Введение

Может ли существовать выпуклый 3d-многогранник [1,2,3], все грани которого – равные треугольники, но не равносторонние?

Правильные многогранники с треугольными гранями – это тетраэдр, октаэдр и икосаэдр [1,2]

Равногранником или изоэдром называется многогранник, все плоские грани которого одинаковы [2,3,5]. Примером равногранника может служить следующий выпуклый многогранник:

- Ромбододекаэдр - двенадцатигранник, составленный из одинаковых ромбов [2,5];

Постановка задачи: показать возможность построения изоэдра [1,3] с треугольными плоскими гранями, не являющимися правильными треугольниками.

Эту задачу, в силу её постановки, разобьём на две.

Задача №1

Изучить возможность построения изоэдра с неправильным треугольником в качестве плоской грани.

В свою очередь задача №1 делится на подзадачи, различающиеся в количестве рёбер изоэдра, сходящихся у каждой вершины (это т.н. индекс смежности вершины или просто индекс вершины). Дадим основные определения.

Индекс вершины – число рёбер, инцидентных вершине [1,2,3].

Для треугольников-граней, не сильно отличных от равносторонних, индекс вершины получаемого многогранника может принимать лишь три значения: 3, 4, 5 [1,2,3].

Рассмотрим все эти возможные случаи.

Присвоим символы **a, b, c** - сторонам треугольной грани; при этом, не ограничивая общности, примем выполнение неравенства: $\mathbf{a} > \mathbf{b} > \mathbf{c}$

Запишем уравнение Эйлера [1,3] для 3d пространства:

$$В – Р + Г = 2 \qquad (1)$$

где, соответственно, обозначено

В – число 0-мерных граней (вершин),

Р – число 1-мерных граней (рёбер),

Г – число 2-мерных граней (плоских граней)

Топологическая характеристика полиэдра [1]в 3d пространстве – это набор значений (В,Р,Г).

(i) Индекс вершины равен 3.

Допустим Г = **n**. Тогда учитывая, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням, и в каждой вершине сходятся ровно 3 ребра, получим уравнение для **n** :

$$3\mathbf{n/3} - 3\mathbf{n/2} + \mathbf{n} = \mathbf{2} \qquad (2)$$

Находим $\mathbf{n = 4}$

Т.е. искомая фигура – тетраэдр[1,3]. Его характеристика (4,6,4). При этом ограничением на форму треугольной грани является условие реализуемости трёхгранного угла при вершине, а именно – больший угол треугольной грани должен быть меньше суммы двух остальных углов. Это значит, что треугольник должен быть остроугольным. Легко видеть, что такие тетраэдры реализуемы, для чего достаточно посмотреть развёртку тетраэдра и найти соответствие между рёбрами и вершинами.

(ii) Индекс вершины равен 4.

Положим опять Г = **n** . Тогда, очевидно, В = 3**n/4** , Р = 3**n/2** и, уравнение Эйлера даёт следующее соотношение:

$$\mathbf{n}(3/4 - 3/2 + 1) = 2 \qquad (3)$$

Отсюда **n** = 8

Характеристика полученного полиэдра имеет вид (6,12,8), т.е. фигура топологически эквивалентна правильному октаэдру [1,3].

Исследуем, есть ли какие-нибудь ещё ограничения, а именно – комбинаторные и метрические, - на построение искомого изоэдра.
Для этого рассмотрим развёртку [1,3] изоэдра, которая, кстати сказать, схематически будет выглядеть точно также как развёртка правильного октаэдра с той лишь разницей, что будут обозначены буквами длины рёбер искомой фигуры.

Обозначаем по часовой стрелке стороны треугольной грани символами **a, b, c**. Т.к. соседние треугольники у вершины имеют попарно совпадающие рёбра, то разметка рёбер одного из треугольников вызовет индуцированную разметку рёбер на смежных треугольниках, и учитывая направление разметки по часовой стрелке, будем иметь следующие тройки наборов разметки, двигаясь по часовой стрелке вокруг вершины снаружи рассматриваемой фигуры:

abc, cab, bca, abc

и здесь мы приходим к противоречию, т.к. последнее ребро должно иметь разметку “**a**”. Отсюда делаем вывод, что по комбинаторно-метрическим соображениям построение равногранника с неправильным треугольником в виде плоской грани топологической характеристики (6,12,8) – невозможно.

(iii) Индекс вершины равен 5.

Аналогично пункту (ii) запишем числа В, Р, Г через неизвестное число граней **n**. В= 3**n/5** Р = 3**n/2** **Г = n,** уравнение Эйлера будет:

$$\mathbf{n(\ 3/5 - 3/2 + 1) = 2} \qquad \mathbf{(5)}$$

Отсюда **n = 20** Характеристика многогранника имеет вид (12, 30, 20), и он топологически эквивалентен правильному икосаэдру [1,2,3].

Повторяя рассуждения, аналогичные случаю (ii), приводя в соответствие рёбра и их символы (длины), получим противоречие, которое доказывает невозможность построения искомого равногранника.

Задача №2

Изучить возможность построения хотя бы одного изоэдра с равнобедренным треугольником в качестве плоской грани.

Пусть основание треугольника равно α и боковая сторона равна $\boldsymbol{\beta}$.

Рассмотрим правильный **n–**угольник со стороной α и его копию.

Построим антипризму [1,2,4] с вышеуказанным **n–**угольником вверху и внизу, причём верхний повёрнут относительно нижнего на угол **π/n**. В качестве боковых треугольников рассмотрим исходный равнобедренный треугольник.

Чтобы скрыть основания - **n–**угольники, нарисуем прямую пирамиду из **n** указанных равнобедренных треугольников на верхнем основании антипризмы и вторую, такую же, на нижнем основании антипризмы.

Мы получили искомый равногранник. Он состоит из 4**n**=**n+2n+n** равнобедренных треугольников, (**2n+2**) вершин и **6n=n+n+2n+n+n** рёбер. (где, соответственно, **n+n** рёбер у верхней пирамиды, **2n** рёбер – число боковых рёбер антипризмы, **n+n** рёбер у нижней пирамиды). При этом две вершины, с торцов, имеют индекс **n** и ещё **2n** вершин имеют индекс **5**.

Его топологическая характеристика (**2n+2, 6n,** 4**n).**

Условия реализуемости этого равногранника таковы:

Антипризму можно строить для любых равнобедренных треугольников, а вот для *пирамиды* необходима реализуемость многогранного угла [1,2,4]при её вершине, для чего сумма плоских углов при вершине не должна превышать либо равняться **2π** радиан [1,4]. Легко из этого получить условие на соотношение сторон равнобедренного треугольника:

$$\mathbf{2n\ arcsin(\alpha/(2\beta)) < \pi} \qquad \mathbf{(6)}$$

Заключение.

В результате доказаны следующие утверждения:

(a) Построить равногранник с треугольной гранью в виде неправильного треугольника – с учётом ориентации – ***можно только лишь в одном случае с*** топологической характеристикой многогранника вида (4,6,4).

(b) Построить равногранник с треугольной гранью в виде равнобедренного треугольника, где основание треугольника равно **α** и боковая сторона равна **β**, ***возможно для целой серии*** топологических характеристик вида (**2n+2, 6n,** 4**n)** , где **n≥3 .** При этом необходимо соблюдать допустимые соотношения между параметрами треугольной грани **α** и **β**, и числом сторон **n** правильного многоугольника, совпадающего с торцами антипризмы, составляющей искомый равногранник:

$$\mathbf{arcsin(\alpha/(2\beta)) < \pi/(2n)}$$

Минимально возможная топологическая характеристика такого вида многогранников имеет вид (8,18,12). Сам равногранник при этом выглядит как треугольная антипризма с соответствующими тетраэдрами на основаниях.

Замечание. Равногранники других топологических типов с гранью, имеющей форму равнобедренного треугольника, тоже могут существовать.

Библиографический список

1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. - М.: Гостехиздат, 1950.
2. Долбилин Н.П. Жемчужины теории многогранников.- М.: МЦНМО, 2016. - 196 с
3. Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. - М.: Физматгиз, 1958.
4. Циглер Г.М. Теория многогранников.– М.: МЦНМО, 2014. 565 с.
5. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3 (Геометрия) М.: Гостехиздат, 1954, 267 с.

Оригинальность 98%