УДК 514.174

О ЧИСЛЕ РЕШЕТЧАТЫХ РАЗБИЕНИЙ ПЛОСКОСТИ НА ПОЛИГЕКСЫ ЗАДАННОЙ ПЛОЩАДИ

Коломейкина Е.В.

к.ф.-м.н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация

В работе представлен результат, описывающий нижнюю и верхнюю оценки числа решетчатых разбиений плоскости на полигексы заданной площади. То есть таких разбиений, при которых любую фигуру разбиения можно перевести параллельным переносом в любую другую фигуру разбиения, и при этом все разбиение переходит в себя. В доказательстве нижней оценки использована явная конструкция, позволяющая построить требуемое число решетчатых разбиений плоскости. Доказательство верхней оценки для разбиений основано на критерии существования решетчатых разбиений плоскости на полигексы, а также на теории самонепересекающихся блужданий.

Ключевые слова: разбиения, решетчатые разбиения, полимино, полигексы, самонепересекающиеся блуждания.

ABOUT A NUMBER OF LATTICE PLANE TILINGS BY THE GIVEN AREA POLYHEXES

Kolomeykina E.V.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Abstract

We study a problem about a number of lattice plane tilings by the given area polyhexes. The tiling we call the lattice tiling if any pair of tiles are connected by the translation that maps tiling to itself. In the proof of a lower bound we give an explicit construction of required lattice plane tilings. The proof of an upper bound is based on a criterion of the existence of lattice plane tiling by polyhexes, and on the theory of self-avoiding walks on a lattice.

Keywords: tilings, lattice tilings, polyomino, polyhexes, the self-avoiding walks.

Введение. *Полигекс* представляет собой связную геометрическую фигуру на плоскости, составленную из конечного числа правильных шестиугольников площади 1, таких, что каждый шестиугольник, входящий в полигекс, имеет общее целое ребро с каким-либо другим шестиугольником этого полигекса. Отметим, что полигексы можно рассматривать как конечные подмножества шестиугольного паркета со связной внутренностью. Полигексы изучались в работах Голомба [1], Гарднера [2], Роадса [3], Майерса [6], Малеева [5] и других авторов. В популяризацию математических задач, связанных с полигексами, большой вклад внес Гарднер, включив соответствующие главы в свои книги.

Разбиение плоскости на полигоны (ячейки) называется *решетчатым*, если любой полигон (ячейку) можно перевести в любой другой полигон (ячейку) разбиения параллельным переносом, совмещающим все разбиение с собой. Иными словами, разбиение на полигоны считается *решетчатым*, если существует группа трансляций (параллельных переносов) плоскости, которая действует на множестве ячеек транзитивно. Очевидно, что решетчатые разбиения являются подмножеством трансляционных разбиений. Мы рассматриваем решетчатые разбиения плоскости на полимино и полигексы, гомеоморфные диску. Два разбиения плоскости будем называть *эквивалентными*, если существует движение плоскости, переводящее одно разбиение в другое. Мы будем рассматривать разбиения плоскости на гомеоморфные диску полигексы и предполагать, что решетка периодов разбиения является подрешеткой целочисленной гексагональной решетки.

Пусть площадь полигекса n, то есть полигекс состоит из n шестиугольников единичной площади каждый. Возникает вопрос о подсчете числа $t(n)$ решетчатых разбиений на полигексы заданной площади n. Числа $t(n)$ для малых значений n были вычислены в работах Глена Роудса и Малеева А.В.. Ранее похожий результат был приведен для решетчатых разбиений плоскости на полимино [7]. Мы докажем здесь следующее утверждение.

Теорема. Для числа $t(n)$ решетчатых разбиений плоскости на полигексы заданной площади n, решетка периодов которой является подрешеткой гексагональной решетки, справедливы следующие оценки:

$$C_1 \cdot 2^n \le t(n) \le C_2 n^3 (3,42)^n .$$

Доказательство нижней оценки. Рассмотрим произвольную последовательность из нулей и единиц длины n. Восстановим по ней полигекс из $n+1$ шестиугольника единичной площади. Способ стыковки задан 0 и 1, а именно: 0, если следующий шестиугольник смежен с предыдущим по нижнему горизонтальному ребру; 1, если смежен по боковому правому нижнему ребру. Таким образом, любой такой последовательности будет поставлен полигекс в соответствие. Количество таких полигексов, определяемых последовательностью длины n, будет 2^n. Надо заметить, что некоторые разбиения могут совпадать из-за имеющихся осей симметрии у шестиугольников. Этим объясняется появление константы C_1 в оценке снизу.

Доказательство верхней оценки. Вместо площади будем фиксировать периметр полигекса. Пусть $t'(p)$ -- число решетчатых разбиений плоскости на полигексы полупериметра p. Периметр произвольного полигекса есть четное число, поэтому определение корректно. Для решетчатых разбиений критерий Конвея устанавливает при каких условиях полигекс задает решетчатое разбиение, а именно:

Теорема. Полигекс порождает решетчатое разбиение плоскости тогда и только тогда, когда граница полигекса может быть разбита на 6 частей $abcdef$ таких, что a переходит в d параллельным переносом, остальные части центрально-симметричны, причем некоторые части могут быть пустыми. При этом различным разбиениям границы полигекса соответствуют различные решетчатые разбиения плоскости на данный полигекс.

Из работы [4] известно, что число $m(l)$ самонепересекающихся блужданий длины l на шестиугольной решетке не превосходит $C(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^l$. Очевидно, что $l_a \geq 0,\ l_b \geq 0,\ l_c \geq 0.$ Для числа $t'(p)$ решетчатых разбиений плоскости на равные полигексы полупериметра p справедлива оценка:

$$t'(p) \leq \sum_{l_a+l_b+l_c=p,} m(l_a)m(l_b)m(l_c) \leq C'(\varepsilon_1)C'(\varepsilon_2)C'(\varepsilon_3)\cdot \sum_{l_a+l_b+l_c=p} (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_1)^{l_a}\cdot$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_2)^{l_b}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon_3)^{l_c} \leq C'(\varepsilon)\cdot \sum_{l_a+l_b+l_c=p} (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{l_a+l_b+l_c}$$

Последнее неравенство получается с учетом $\varepsilon = max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

$$C'(\varepsilon)\sum_{l_a+l_b+l_c=p} (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{l_a+l_b+l_c} \leq C'(\varepsilon)\cdot \sum_{l_a+l_b+l_c=p} (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{p} =$$

$$= C'(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^p \sum_{l_a+l_b+l_c=p} 1 \leq C''(\varepsilon)(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^p\, p^2.$$

Поскольку связь между полупериметром полигекса и его площадью $p \leq 2n+1$, то имеют место следующие оценки:

$$t(n) \leq \sum_{p=1}^{2n+1} t'(p) \leq \sum_{p=1}^{2n+1} C''(\varepsilon)\, p^2 (\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^p.$$

Заменим последнее выражение на интеграл $\int_1^{2n+1} C''(\varepsilon)x^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^x dx$, и, учитывая, что $\int x^2 a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k^3 ln^3 a}(k^2(ln^2 a)x^2 - 2k(lna)x + 2),$ получаем

$t(n) \leq C'''(\varepsilon)(2n+1)^2(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon)^{2n}$, где $C'''(\varepsilon)$ некоторая константа. Для последней скобки ограничимся неравенством $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\varepsilon \leq 1{,}85$, и, заменяя константу $C'''(\varepsilon)$ на $\overline{C}$, имеем оценку $t(n) \le \overline{C}(2n+1)^3 1{,}85^{2n}$. Занося все константы в константу C_2, получаем окончательную верхнюю оценку для числа решетчатых разбиений плоскости на равные полигексы заданной площади

$$t(n) \le C_2 n^3 \cdot 3{,}42^n.$$

Библиографический список:

[1] *Голомб С.* Полимино / С. Голомб, – М.: Мир, 1975. – 207 с.

[2] *Гарднер М.* Путешествие во времени / М. Гарднер, – М.: Мир, 1990. – 341 с.

[3] *Glenn C. Rhoads* Planar tilings by polyominoes, polyhexes, and polyiamonds / C.R. Glenn // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2005. – 174 C.329–353.

[4] *Madras N., Slade G.* The self-avoiding walk // Birkhauser. ISBN 978-0-8176-3891-7.

[5] *Малеев А.В.* О числе трансляционных разбиений / А.В. Малеев // Кристаллография. – 2013. - №58(5). – С.749-756.

[6] *Myers J.* Polyomino, polyhex and polyiamond tiling / J. Myers // [Электронный ресурс]. – Режим доступа –

URL: http://www.srcf.ucam.org/jsm28/tiling/

[7] *Шутов А.В., Коломейкина Е.В.* Оценка числа решетчатых разбиений плоскости на полимино заданной площади / А.В. Шутов, Е.В. Коломейкина // Моделирование и анализ информационных систем. – 2013. – №20(5). – С.148–157.

Оригинальность 79%