УДК 512+519.6

БИГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ И КВАНТОВАЯ КОМБИНАТОРИКА

Айдагулов Р.Р.,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Институт машиноведения РАН им. А.А. Благонравова
Россия, г. Москва

Аннотация: Бигрупповые алгебры являются цветными алгебрами, имеющими многочисленные приложения. Здесь они используются в обобщении теоремы Поттера и в квантовой комбинаторике.

Ключевые слова: цветные алгебры, группа цветов, образующие Дарбу и Клиффорда.

GROUP ALGEBRAS AND QUANTUM COMBINATORICS

Aidagulov R. R.,
candidate of physical and mathematical Sciences, senior researcher
Moscow state University. M. V. Lomonosov
Institute of mechanical engineering RAS. A. A. Blagonravova
Russia, Moscow

Abstract: Bigroup algebras are color algebras having numerous applications. Here they are used in generalizing Potter’s theorem and in quantum combinatorics.

Key words: color algebras, group of colors, generators of Darboux and Clifford.

Группа цветов

Пусть A ассоциативная градуированная алгебра, представляемая как прямая сумма однородных подпространств:

$$A = \bigoplus A_g, g \in G.$$

Умножение двух однородных элементов градуированной алгебры $a \in A_{g_1}, b \in A_{g_2}$ является однородным элементом с градуировкой $g_3 = \varphi(g_1, g_2)$. Из ассоциативности умножения следует, что отображение $\varphi: G \times G \to G$ определяет бинарную ассоциативную операцию, что делает G полугруппой. Обычно рассматривают алгебры, у которых для любых однородных элементов произведения ab, ba имеют одинаковую градуировку, что делает G коммутативной полугруппой. Если в алгебре имеется единица, что в дальнейшем предполагается, то она однородна и имеет градуировку, соответствующий единице в G. Если каждое подпространство A_gодномерно, то произведения однородных элементов при перестановке местами отличаются только на множитель, зависящий только от их градуировок. Цветные алгебры [1] определяются как градуированные алгебры, где произведения однородных элементов при перестановке местами отличаются только на обратимый множитель из коммутативного кольца K, зависящий только от их градуировок. Это значит

$$(1) \qquad ab = \lambda(\hat{a}, \hat{b})ba, \qquad \lambda(\hat{a}, \hat{b})\lambda(\hat{b}, \hat{a}) = 1.$$

Здесь $\hat{a} \in G$ означает градуировку (цвет) однородного элемента a. Из ассоциативности умножения следует, что $\lambda(\hat{a}, \hat{b})$ бимультипликативна, т.е. бихарактер.

На полугруппе G определяется естественная конгруенция (эквивалентность):

$$g_1 \cong g_2 \leftrightarrow \lambda(g_1, g_3) = \lambda(g_2, g_3) \ \forall g_3 \in G.$$

Так как произведения эквивалентных элементов эквивалентны, можно факторизовать эту полугруппу по этой эквивалентности и вложить в группу Гротендика. Эта группа называется группой цветов [2]. В групповых и бигрупповых алгебрах используются мультипликативная запись для градуировок. Для группы цветов удобнее пользоваться аддитивной записью, когда произведениям однородных элементов соответствует сумма их цветов.

При этом бимультипликативный бихарактер обратиться в билинейное кососимметричное скалярное произведение на группе цветов. Группа цветов, без нечетных элементов имеет структуру $G = C \oplus C$. Когда $\mathrm{C} = (Z_p)^k$, группа цветов превращается в симплектическое пространство размерности 2k над полем F_p характеристики p. Почти все свойства остаются в силе и в случае, когда p не является простым числом. Определим бигрупповую алгебру типа $\mathrm{C} = (Z_p)^k$ как алгебру квазикоммутативных многочленов $K(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ со следующими соотношениями:

$$(2) \qquad x_i^p = y_i^p = 1, \qquad x_i y_j = \theta^{\delta_i^j} y_j x_i.$$

Здесь θ примитивный корень степени p, δ_i^j – символ Кронекра. Элементы x_i, y_i – называются образующими Дарбу и представляют базис Дарбу для определенного выше кососимметричного скалярного произведения в группе цветов.

Квантовая комбинаторика.

Для переменных с коммутационными соотношениями $xy = \theta yx, \theta^p = 1$ (θ примитивный корень степени p, p – не обязательно простое число) известна теорема Поттера [3] о том, что

$$(3) \qquad (x + y)^p = x^p + y^p.$$

Такое утверждение без упоминания имени автора имеется так же в большой статье [4], где вводится квантовые целые числа, квантовые факториалы и квантовые биномиальные коэффициенты. Однако, использованные там методы не позволяют обобщить соотношения типа (3) на большее число слагаемых.

Соотношение (3) выводится легко, используя индукцию для не коммутативных биномиальных коэффициентов. Действительно

$$(x + y)^2 = x^2 + (1 + \theta)yx + y^2,$$

$$(x + y)^3 = x^3 + (1 + \theta + \theta^2)yx^2 + (1 + \theta + \theta^2)y^2x + x^3.$$

Вводим обозначение $n_\theta = 1 + \theta + \dots + \theta^{n-1}$. Ясно, что $n_p = 0$. Эти числа, подсчитывающие вхождение членов с учетом коммутационного соотношения $xy = \theta yx$, некоторые авторы называют квантовыми [4]. Они совпадают с обычными в коммутативном случае $\theta = 1$. Вводится так же квантовые факториалы и квантовые биномиальные коэффициенты:

$$(4) \qquad n_\theta! = n_\theta (n-1)_\theta \dots 2_\theta, \qquad \binom{n}{k}_\theta = \frac{n_\theta!}{(n-k)_\theta!\ k_\theta!}.$$

Легко проверяется, что

$$(5) \qquad \binom{n-1}{k-1}_\theta \theta^{n-k} + \binom{n-1}{k}_\theta = \frac{(n-1)_\theta!\,(k_\theta \theta^{n-k} + (n-k)_\theta)}{(n-k)_\theta!\ k_\theta!} = \binom{n}{k}_\theta.$$

Используя индукцию отсюда получается теорема Поттера, учитывая, что $p_\theta = 0$. Заметим, что $m_\theta \neq 0$ при $m < p$.

Когда в формуле (3) число слагаемых 3 или более:

$$(z_1 + z_2 + z_3)^p$$

анализ приводит к необходимому условию для сохранения формулы такого вида:

$$(6) \qquad z_i z_j = \theta_i z_j z_i, \qquad i < j$$

при некотором упорядочении номеров переменных, где θ_i примитивные корни степени p. При $p = 2$ единственный примитивный корень второй степени (в характеристике, отличном от 2) это -1. Соответственно, соотношения (6), являются определяющими соотношениями для образующих Клиффордовой алгебры. При p>2 эти соотношения определяют образующие обобщенной Клиффордовой алгебры. В случае большего числа слагаемых, в обобщенной формуле Поттера могут появиться одночлены (произведения слагаемых), коммутирующие со всеми остальными слагаемыми. Чтобы их учесть, слагаемые надо рассмотреть как однородные элементы бигрупповой алгебры, т.е. как однородные квазикоммутативные многочлены. Имеет место:

Теорема 1. *Бигрупповая алгебра типа* $\mathrm{C} = (Z_p)^k$ *может задаваться Клиффордовыми образующими.*

Доказательство. Пусть x_i, y_i образующие Дарбу. В качестве образующих Клиффорда можно взять такие произведения:

$$z_1 = x_1, z_2 = y_1, z_3 = x_1 y_1 x_2, \dots, z_{2l+1} = x_{l+1} \prod_{i=1}^{l} x_i y_i\,, z_{2l+2} = y_{l+1} \prod_{i=1}^{l} x_i y_i.$$

Верна и обратная теорема. Цветная (квазикоммутативная) алгебра может быть задана конечными коммутационными соотношениями:

$$(7) \qquad z_{g_i} z_{g_j} = \lambda(g_i, g_j) z_{g_j}\, z_{g_i}, \quad \lambda(g_i, g_j)^{n_{ij}} = 1, n_{ij} \epsilon Z.$$

Теорема 2. *В обобщенной Клиффордовой алгебре с соотношениями (6) можно ввести структуру бигрупповой алгебры типа* $\mathrm{C} = (Z_p)^k$.

Доказательство. В работе [2] в более общей ситуации (с соотношениями (7)) показано, что конечная группа цветов изоморфна

$$G = C \oplus C \qquad or \qquad G = Z_2 \oplus C \oplus C$$

С конечной абелевой группой C. При наличии компоненты Z_2, цвета имеющие не нулевые показатели по этой компоненте являются нечетными и произведение любых двух элементов одного нечетного цвета равно нулю. В этой работе получено не только структура группы цветов, но и получение образующих Дарбу, соответствующих базису Дарбу в группе цветов. При этом, для коммутационных соотношений (6), группа цветов получается без нечетных цветов. Это доказывает теорему.

Теперь можно обобщить формулу степени суммы слагаемых:

$$(8) \quad (z_1 + z_2 + \cdots + z_k)^p = \sum_{n_1 + \cdots n_k = p} \frac{p!}{n_1! \dots n_k!} z_1{}^{n_1} \dots z_k{}^{n_k}$$

на некоммутативный случай.

Пусть выполнены коммутационные соотношения (6). Возводим выражение (8) в степень $n \leq p$ и загоним степени переменного z_1 в конец каждого одночлена. Так как a_1 коммутирует одинаково с каждой переменной $z_i, i > 1$ мы получим следующую формулу:

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1}_{\theta_1} (z_2 + \dots + z_k)^{n-n_1} {z_1}^{n_1}.$$

Далее раскроем скобки и загоним переменную непосредственно перед a_1:

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_k)^n = \sum_{n_1+n_2=0}^{n} \binom{n}{n_1}_{\theta_1} \binom{n-n_1}{n_2}_{\theta_2} (z_3 + \dots + z_k)^{n-n_1-n_2} {z_2}^{n_2} {z_1}^{n_1}.$$

Продолжая этот процесс далее получим окончательную формулу:

$$(z_1 + \dots + z_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1}_{\theta_1} \dots \binom{n-n_1-..n_{k-2}}{n_{k-1}}_{\theta_{k-1}} {z_k}^{n_k} {z_{k-1}}^{n_{k-1}} \dots {z_2}^{n_2} {z_1}^{n_1}.$$

При $n = p$ биномиальный коэффициент $\binom{n}{n_1}_{\theta_1}$ равен нулю при $0 < n_1 < p$, Если $n_1 = p$ остальные $n_i = 0$. Если $n_1 = n_2 = \dots = n_l = 0, 0 < n_{l+1} < p$, то соответствующий биномиальный коэффициент равен нулю. Отсюда следует обобщение теоремы Поттера:

Теорема 3. *В обобщенной Клиффордовой алгебре с коммутационными соотношениями (6) выполняется:*

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_k)^p = z_1^p + z_2^p + \dots + z_k^p. \tag{9}$$

Заключение

Соотношения типа (9) могут использоваться в финслеровых метриках. Они могут использоваться так же в разложении оператора Лапласа высокой степени на множители с дифференцированием первой степени как в классических уравнениях Дирака, использованных в разложении оператора Лапласа при $p = 2$. При четном p в алгебрах над R некоторые степени справа в (9) будут отрицательными. Функцию слева в (9) назовем изотропным, если норма справа равна нулю. Это может быть использовано при поиске контрпримеров к гипотезе Эйлера, обобщающей теорему Ферма, как целочисленных изотропных векторов с $k = p$. Все известные контрпримеры к этой гипотезе соответствуют четному показателю p и могут быть интерпретированы так.

Библиографический список:

1. Айдагулов Р.Р., Шамолин М.В. Группа цветов. Современная математика. // Фундаментальные направления. – 2009 – Т.62 - С. 14-26.

2. Игнатьев М.В. Квантовая комбинаторика. // Математическое просвещение. – 2014 – № 18 – С. 66-111.

3. Михалев А.А. Подалгебры свободных цветных супералгебр. // Ли. Мат. заметки. – 1985 - №5. – С. 653-659

4. Rapfael Loewy, Volker Mehrmann. A note on Potter’s theorem for quasi-commutative matrices. Linear algebra and its Applications 430. – 2009 - 1812-1825.

Оригинальность 99%