

УДК 330.4

***МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЛОУ ДЛЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ***

***Шишмакова Н.С.***

*магистр,*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*Санкт-Петербург, Россия*

***Петрова И.С.***

*магистр,*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*Санкт-Петербург, Россия*

**Аннотация**

В данной работе рассмотрены дискретная и непрерывная модели Солоу. Произведен расчет параметров моделей для экономики Российской Федерации в прикладном пакете Matlab с использованием данных службы государственной статистики. Рассмотрены различные варианты производственной функции в непрерывной модели Солоу.

**Ключевые слова:** производственная функция, модель Солоу, математическое моделирование.

***THE SOLOW MODEL FOR RUSSIAN ECONOMY***

***Shishmakova N.S.***

*master,*

*St Petersburg University*

*Saint-Petersburg, Russia*

***Petrova I.S.***

*master,*

*St Petersburg University*

*Saint-Petersburg, Russia*

### **Annotation**

This article considers discrete and continuous Solow models. The calculation of model parameters for the economy of the Russian Federation in the Matlab using data from the state statistics service. Various variants of the production function in the continuous Solow model are considered.

**Keywords:** production function, Solow model, mathematical modelling.

Один из важных методов анализа и исследования экономической системы является применение математических моделей. Они позволяют прогнозировать различные сценарии развития экономики, предугадывать кризисы и рассчитывать риски. Использование математических моделей в экономике помогает расставлять приоритеты в правовой и социальной политике [5]. Например, [3] модели процессов в системе профессионального образования и здравоохранения, существенно зависящих от экономических отраслей, и обратного влияния систем подготовки специалистов, на развитие экономики. Развитие отдельных направлений социальной сферы определяется развитием экономики в целом. Ориентироваться в количественном анализе можно на основные макроэкономические показатели такие, как валовой внутренний продукт, занятость населения, фонды потребления, инвестиции, производственные фонды и другие показатели. В моделях макроэкономики эти показатели учитываются в производственных функциях таких, как функции Солоу, Харрода, Кейнса, Самуэльсона-Хикса, Леонтьева и Неймана, и других авторов [3]. В работе проведен анализ макроэкономических показателей российской экономике на основе моделей Солоу.

Одной из базовых моделей экономики является модель, предложенная в 1957 году американским экономистом Робертом Солоу [1]. В модели учитываются: валовый внутренний продукт  $X$ , фонд непроемственного потребления  $C$ , инвестиции  $I$ , основные производственные фонды (капитал)  $K$ , число занятых в экономике  $L$ .

В качестве входных параметров используются следующие показатели: годовой темп прироста числа занятых  $\nu$ , доля выбывших за год основных производственных фондов  $\mu$ , норма накопления (доля инвестиций в ВВП)  $\rho$ , коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Дискретная модель экономики Солоу*, в которой введена производственная функция:

$$X_t = AK_t^\alpha L_t^\beta, \quad (1)$$

где  $A$  – коэффициент учитывающий научно-технический прогресс,  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты эластичности.

При этом ВВП распределяется на валовые инвестиции и потребление:

$$X_t = I_t + C_t. \quad (2)$$

Основные производственные фонды будущего года определяются через фонды текущего года и валовые инвестиции:

$$K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + I_t. \quad (3)$$

Число занятых на производстве ВВП определяется через число занятых за прошедший год:

$$L_t = (1 + \nu)L_{t-1}. \quad (4)$$

Инвестиции задаются через долю в ВВП:

$$I_t = \rho X_t. \quad (5)$$

Параметр  $\rho$  является управляющим. Также из смысла параметров накладываются ограничения:

$$-1 < \nu < 1, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \mu < 1.$$

Существует также непрерывная модель Солоу. В данной модели вводятся

уравнения для скоростей изменения  $L$  и  $K$  с соответствующими начальными условиями:

$$\frac{dL}{dt} = \nu L. \quad (6)$$

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, K(0) = K_0 \quad (7)$$

Используя начальное условие:  $L(0) = L_0$ , решаем уравнение (6) и получаем первое уравнение модели:

$$L = L_0 e^{\nu t}. \quad (8)$$

Объединив уравнения (1), (2), (5), (7), (8) получаем математическую непрерывную модель Солоу.

Для определения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $\rho$  используются данные Федеральной службы государственной статистики [4] с 2000 по 2014 года. Нахождение параметров системы осуществляется методом наименьших квадратов, в случае дискретной модели Солоу производится минимизация функционалов:

$$J_1(\mu, \alpha, A) = \sum_{i=1}^n (K_{i+1} - (1 - \mu)K_i - AK_{i-1}^\alpha L_i^{1-\alpha})^2 \quad (9)$$

$$J_2(\nu) = \sum_{i=1}^n (L_{i+1} - (1 + \nu)L_i)^2 \quad (10)$$

по соответствующим параметрам в среде программирования математического пакета Matlab.

Были найдены следующие значения параметров:

$$\mu = 0.001, \quad \alpha = 0.6131, \quad A = 137.34, \quad \nu = 0.007, \quad \rho = 0.3.$$

Сопоставление расчетных результатов с статистическими приведены на рисунках 1-3.

На рисунке 1 дана зависимость расчетного значения ВВП, показанного пунктиром, от статистических данных, обозначенных звездочками.

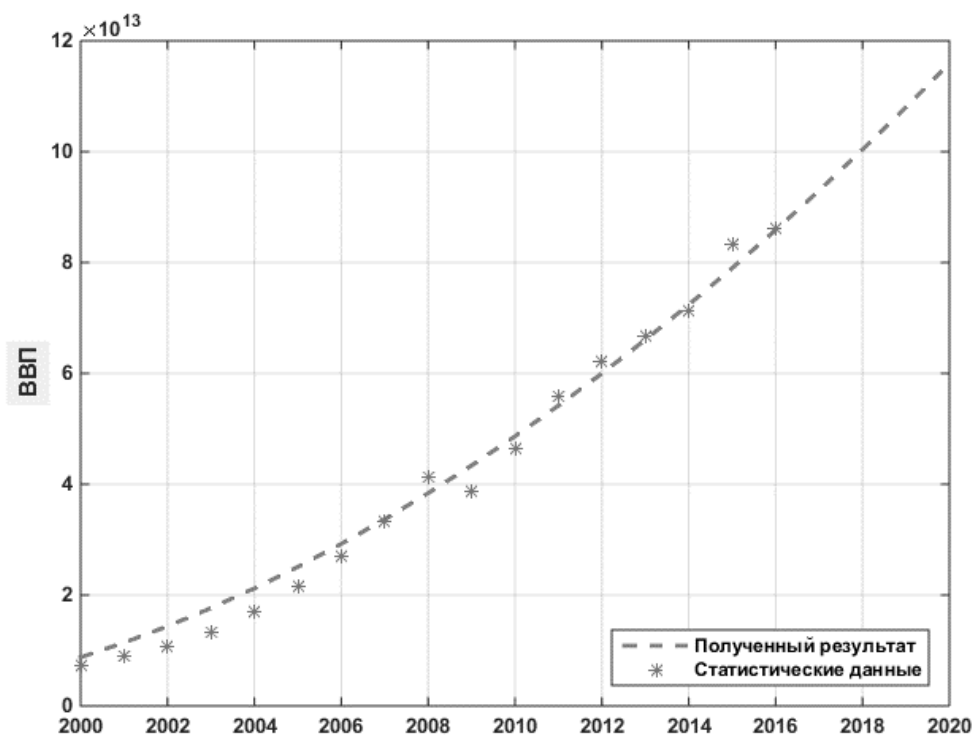


Рис.1 – Зависимость ВВП от времени

На рисунке 2 дана зависимость расчетного количества занятых в экономике от статистических данных.

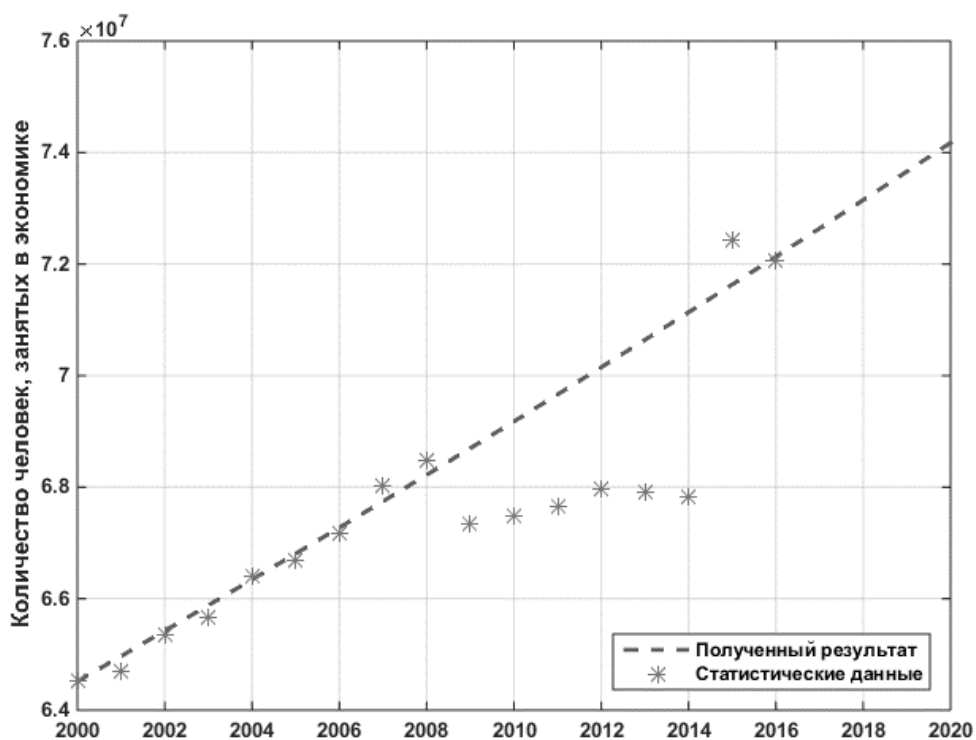


Рис.2 – Зависимость количества занятых от времени

На рисунке 3 дана зависимость расчетного значения основных фондов от статистических данных.

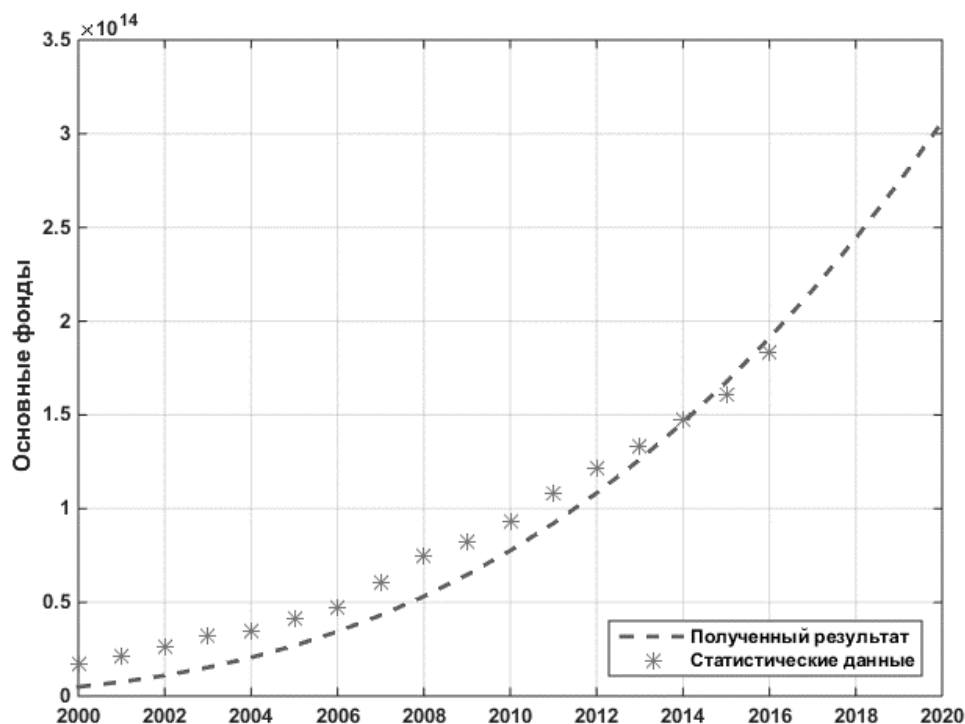


Рис.3 – Изменение основных фондов со временем

Для определения параметров непрерывной модели минимизируется функционал:

$$J_3(\mu, \alpha, A) = \sum_{i=1}^n (K_{i+1} - K(t_i, \mu, \alpha, A))^2,$$

где  $K(t_i, \mu, \alpha, A)$  есть решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

с заданным начальным условием.

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется методом Рунге-Кутты.

Были найдены следующие значения параметров:

$$\mu = 0.001, \quad \alpha = 0.9472, \quad A = 1.9894, \quad \nu = 0.007, \quad p = 1.$$

Сопоставление расчетных результатов с статистическими приведены на Дневник науки | [www.dnevniknauki.ru](http://www.dnevniknauki.ru) | СМИ ЭЛ № ФС 77-68405 ISSN 2541-8327

рисунках 4-6.

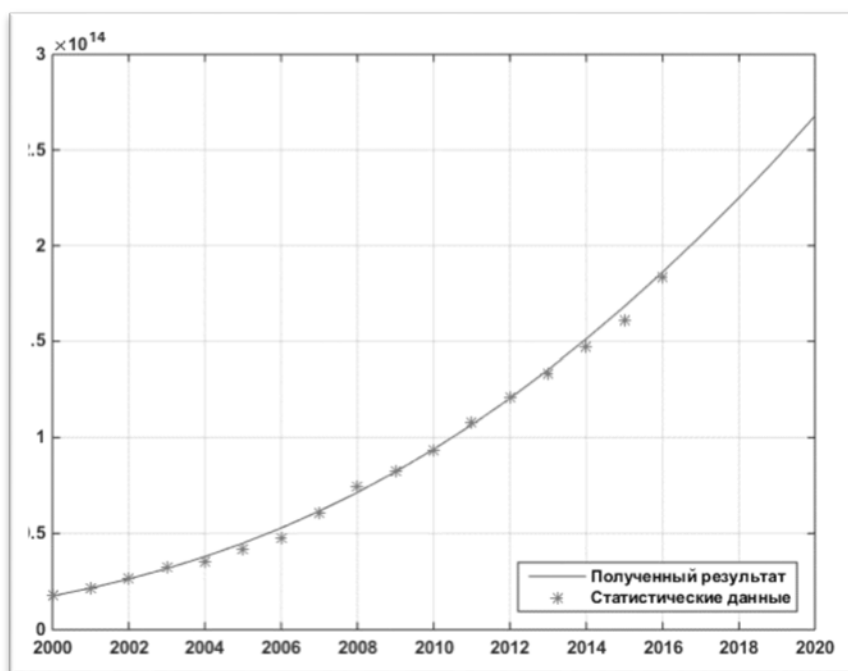


Рис.4 – Изменение основных фондов

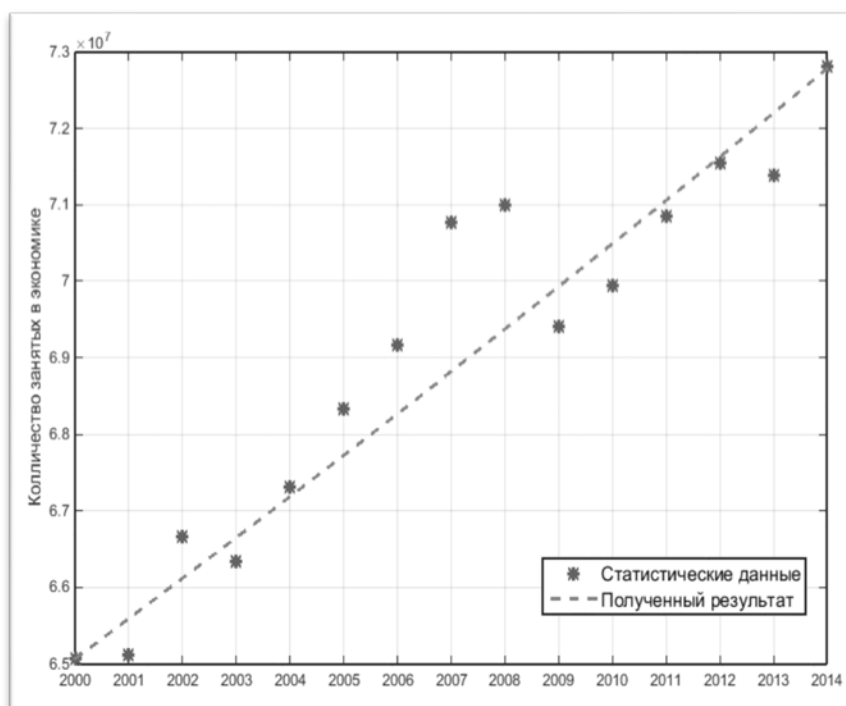


Рис.5 – Изменение числа занятых

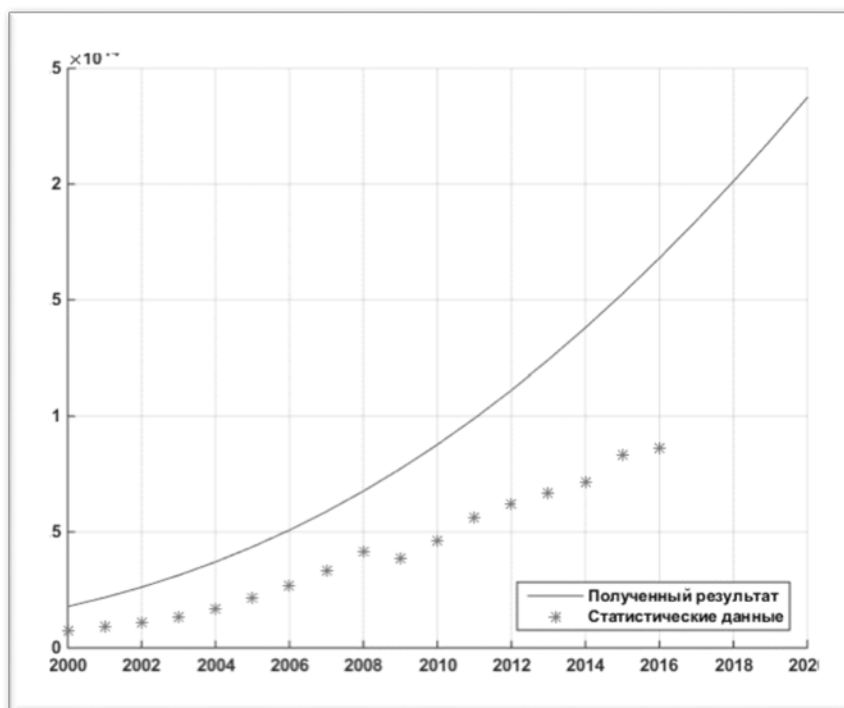


Рис.6 – Изменение ВВП

Как следует из проведенного анализа расчетные результаты в случае дискретной модели совпадают со статистическими данными с точностью до 5%.

Однако в непрерывном случае полученные значения основных фондов и числа занятых совпадают со статистическими данными, а значение ВВП значительно отличается от статистики. Это может быть исправлено изменением производственной функции в модели.

В работе [2] проводится сравнительный анализ применимости нескольких вариантов производственных функций для анализа экономики России в целом и ряда ее отраслей. Учитывая влияние цен на нефть на мировых рынках на динамику ВВП России, в производственную функцию вводится значение цены на нефть:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}P^{\gamma}e^{\zeta t}$$

где  $P$  – значение цены на нефть,  $\gamma$  – коэффициент, характеризующий степенную зависимость ВВП от мировых цен на нефть,  $\zeta$  – коэффициент, характеризующий экспоненциальный временной тренд.

Среди выводов работы стоит выделить, то что введение временного



тренда не является важным для модели с переменной отдачей, а также не стоит переоценивать влияние цен на нефть. Однако, производственная функция с постоянной отдачей ( $\alpha + \beta = 1$ ) не применима для экономики России.

На основе статьи [2] была проверена применимость непрерывной модели Солоу в случае переменной отдачи с производственной функцией:

$$X = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Полученные результаты совпадают со случаем постоянной отдачи.

Также была рассмотрена непрерывная модель Солоу с производственной функцией вида:

$$X = AK^{\alpha}L^{\beta}P^{\gamma}$$

Получены следующие параметры:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.00102, & \alpha &= 0.6281, & A &= 9.9553, \\ \nu &= 0.008, & p &= 0.38, & \gamma &= 0.2514 \end{aligned}$$

В качестве статистических данных по ценам на нефть, использовались данные представленные в статье [2].

При подстановке выше указанных параметров в модель, были получены следующие результаты:

- на рисунке 7 изображено изменение основных фондов

## ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ «ДНЕВНИК НАУКИ»

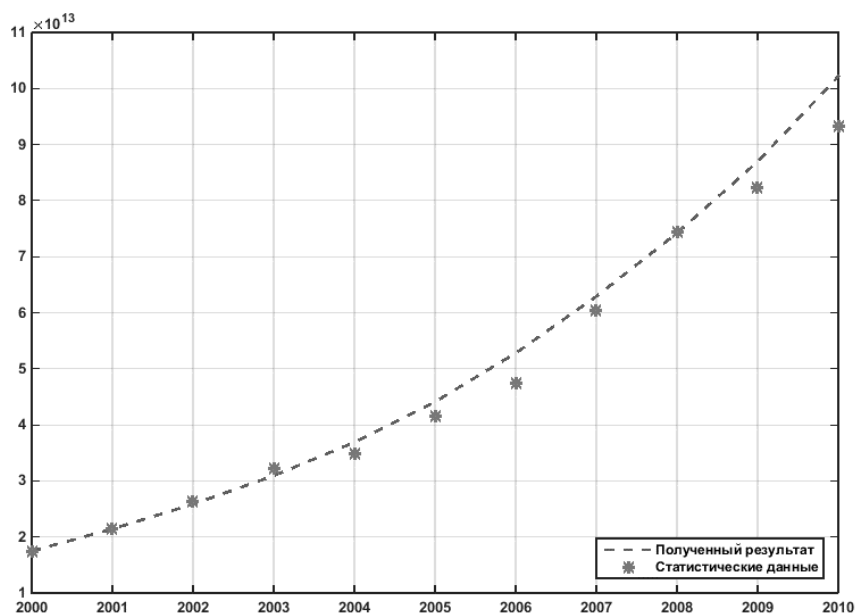


Рис.7 – Изменение основных фондов со временем

- на рисунке 8 изображено изменение количества людей, занятых в экономике

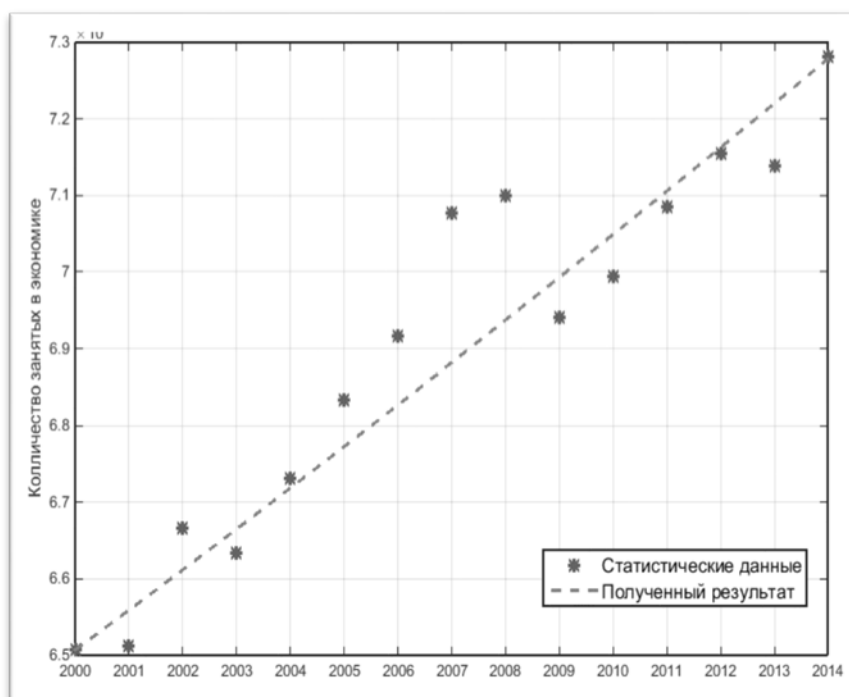


Рис.8 – Зависимость количества занятых от времени

- на рисунке 9 показано изменение значения ВВП с течением времени

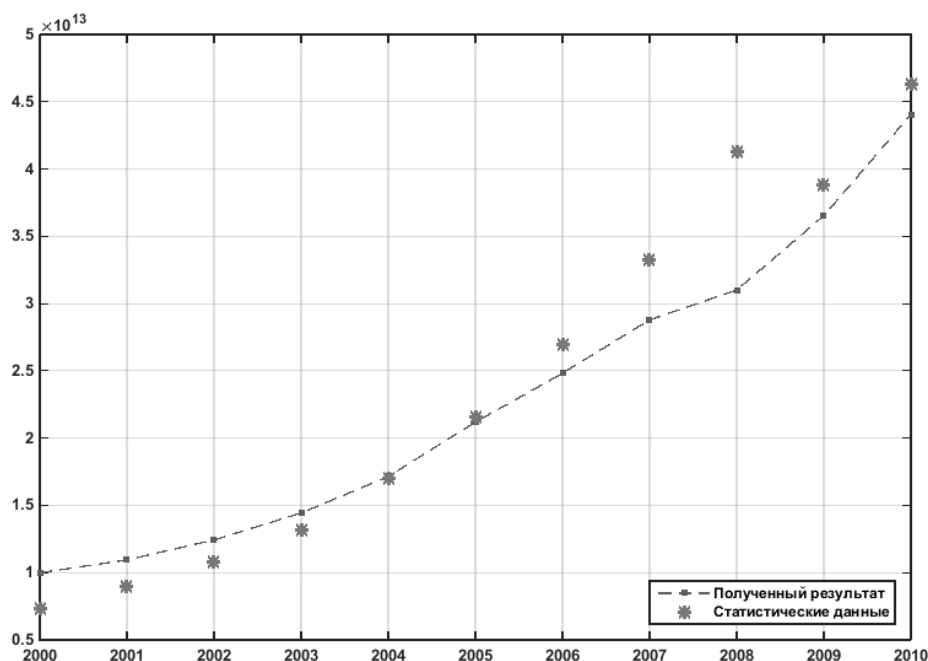


Рис.9 – Зависимость ВВП от времени

Полученные результаты с производственной функцией, включающей в себя цены на нефть, отражают реальные данные лучше, чем в предыдущем случае.

В данной статье были рассчитаны параметры для дискретно и непрерывной модели Солоу для экономики России. Непрерывная модель была рассмотрена с различными производственными функциями. Более точные результаты были получены путем введения в производственную функцию ценового фактора.

**Библиографический список:**

1. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function//The Review of Economics and Statistics, 1957 Vol. 39, No.3, P. 312–320.
2. Кирилук И.Л. Модели производственной функции для российской экономики // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т.5 №2 С. 293 – 312.
3. Питухин Е.А., В.А.Гуртов Математическое моделирование динамических процессов в системе «Экономика – рынок труда – профессиональное образование. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. С.350.
4. Российский статистический ежегодник / Под ред. Суринов А.Е. М.: Росстат, 2017 С. 686.
5. Урунов А.А. Модели и методы расчета экономического роста // Экономический рост и приоритеты правовой политики монография. Пенза, 2017. С. 24-36.

*Оригинальность 95%*