УДК 512.5

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЁННОСТИ ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДМОДУЛЕЙ В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ С ТОЖДЕСТВОМ XY=–YX НАД НЁТЕРОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

Киреева Е. А.

к. ф.-м. н., доцент

Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация.

Пусть K – произвольное нётерово коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей, W – многообразие ассоциативных алгебр над кольцом K, задаваемое тождеством $xy=-yx$, A/I – свободная алгебра счётного ранга многообразия W. В работе доказывается, что все вполне характеристические подмодули алгебры A/I, то есть подмодули, замкнутые относительно всех эндоморфизмов алгебры A/I, конечнопорождены.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, полиномиальные тождества, многообразие, вполне характеристические подмодули.

ON FINITE BASIS PROPERTY OF FULLY CHARACTERISTIC SUBMODULES IN ASSOCIATIVE ALBEBRAS WITH THE IDENTITY XY=–YX OVER NOETHERIAN RINGS

Kireeva E. A.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation.

Let K be an arbitrary noetherian commutative, associative ring with unity, W be the variety of associative algebras over the ring K given by the identity $xy=-yx$, A be the free algebra of countable rank of the variety W. In the paper, we prove that all fully characteristic submodules of the algebra A/I, that is submodules closed under all the endomorphisms of the algebra A/I, are finitely generated.

Key words: associative algebras, polynomial identities, variety, fully characteristic submodules.

Пусть K – произвольное коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей, A – свободная ассоциативная алгебра над K счётного ранга со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots$ Элемент $v=v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ алгебры A (а также выражение $v(x_1, x_2, \ldots, x_k)=0$) называется (*полиномиальным) тождеством* ассоциативной алгебры B над кольцом K, если $v(b_1, b_2, \ldots, b_k)=0$ для любых элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$. Например, коммутативные алгебры удовлетворяют тождеству $[x,y]=0$, где $[x,y]=xy-yx$, тождество $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_s=0$ выполняется в алгебрах, нильпотентных степени не выше s.

Пусть M – некоторое множество тождеств. Класс всех алгебр, в каждой из которых выполняются все тождества из M, называется *многообразием*. Если W – многообразие, то множество всех тождеств, выполняющихся в каждой алгебре из W, образует вполне характеристический, то есть замкнутый относительно всех эндоморфизмов алгебры A, идеал. Такой идеал называют также *T-идеалом*.

Если W – многообразие, I – соответствующий данному многообразию T-идеал, то факторалгебра A/I с порождающими x_1+I, x_2+I, … называется *свободной алгеброй* многообразия W, или *относительно свободной ассоциативной алгеброй.* K-подмодуль в относительно свободной ассоциативной алгебре A/I называется *вполне характеристическим подмодулем,* если он замкнут относительно всех эндоморфизмов алгебры A/I. В случае, если основное кольцо K является полем, вполне характеристические подмодули называются *T-пространствами*.

Как было доказано А.В. Гришиным [2] для алгебр над полями характеристики 2, и В.В. Щиголевым [4] для алгебр над полями характеристики $p>2$, свободные алгебры многообразий ассоциативных алгебр, заданных тождеством

$$[[x,y],z]=0,$$

содержат неконечнопорождённые T-пространства. С другой стороны, как было доказано А.В.Гришиным в [5], в свободных алгебрах многообразий, заданных тождеством

$$[x,y]=0, \tag{1}$$

то есть многообразий коммутативных алгебр, над произвольным бесконечным полем, все T-пространства конечнопорождены. Позднее данный факт был распространён автором на вполне характеристические подмодули алгебр над произвольным нётеровым коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей [3] (см. также [6]).

Естественно теперь рассмотреть близкое к (1) тождество

$$xy=-yx \tag{2}$$

Обозначим символом V многообразие ассоциативных алгебр над K, задаваемое тождеством (2), J – T-идеал, соответствующий многообразию V, тогда A/J – свободная алгебра счётного ранга многообразия V. Нетрудно понять, что если K – поле, то алгебра A/J является либо коммутативной, если характеристика K

равна 2, либо нильпотентной, если характеристика K отлична от 2. Действительно, в этом случае для $x,y,z \in A$ имеем

$$xyz+J=x(-zy)+J=-(xz)y+J=-(-zx)y+J=zxy+J,$$

и, с другой стороны, $(xy)z+J=-z(xy)+J$, откуда получаем $2xyz+J=0+J$. Таким образом, если характеристика поля K отлична от 2, то алгебра A/J является нильпотентной ступени не выше 3. Хорошо известно, что из нильпотентности относительно свободной алгебры следует, что все T-пространства в ней конечнопорождены (см., например, [1]). Однако, если основное кольцо не является полем, то вопрос о конечной порождённости вполне характеристических подмодулей не является столь очевидным.

Основным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема. Пусть K – произвольное нётерово коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей. Тогда все вполне характеристические подмодули в алгебре A/J конечнопорождены.

Доказательство. Необходимо показать, что в алгебре A/J обрываются возрастающие цепочки вполне характеристических подмодулей. Заметим, что, используя тождество (2), мы можем любой ненулевой элемент алгебры A/J записать как сумму одночленов вида $\alpha x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_s}^{k_s} + J$, где $\alpha \in K$, $s, i_1, i_2, \dots, i_s, k_1, k_2, \dots k_s$ – натуральные числа, $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Далее, применяя предложения пунктов 2,3,4 из [3], мы получим искомое утверждение для случаев нётерова кольца характеристики p, где p – простое число, характеристики n, где n – составное число, и характеристики 0.

Библиографический список:

1. Бахтурин А.Ю. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

2. Гришин А.В. Примеры не конечной базируемости Т-пространств и Т-идеалов в характеристике 2 // Фундам. прикл. матем. 1999. Т. 5. С. 101–118.

3. Киреева Е.А. О конечной порожденности вполне инвариантных подмодулей в некоторых относительно свободных ассоциативных алгебрах // Научные труды математического факультета МПГУ (юбилейный сборник 100 лет). М.: Прометей. 2000. С. 269–276.

4. Щиголев В.В. Примеры бесконечно базируемых Т-пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. С. 143–160.

5. Grishin A.V. On the finite basis property of T-spaces over a field of finite characteristic // Proc. of the Moscow – Taiwan alg. workshop. 1994. P. 225–227.

6. Kireeva E.A., T-spaces in associative algebras // Journal of Mathematical Sciences. V. 143, N 5, 2007. P. 3451-3508.

Оригинальность 84%