УДК 514.177.2

КВАЗИРАВНОМЕРНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДИАМЕТРАЛЬНО-СДВОЕННЫХ ПАР ТОЧЕК НА СФЕРЕ

Абдуллин С.Р.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Аннотация.

В работе рассматривается одна из постановок /редуцированной классической задачи Томсона о расположении заряженных шариков (точек) на поверхности сферы в ограниченном смысле, когда точки расположения спарены на концах диаметров сферы. Функционал расположения принимаем по критерию максимального взаимного удаления точек друг от друга. Показана редуцированная система уравнений для определения координат точек квазиравномерного расположения, приведён пример для случая шести точек.

Ключевые слова: задача Томсона, расположение на сфере, конфигурация, изотропный дизайн, диаметральные отрезки, квазиравномерность

QUASI-UNIFORM LOCATION DIAMETRICALLY-DUAL PAIRS OF POINTS ON THE SPHERE

Abdullin S.R.

Art. teacher,

Moscow State Technical University. N.E. Baumana

Moscow, Russia

Annotation

In this paper we consider one of the formulations of the classical Thomson problem on the location of charged balls (points) on the surface of the sphere in a limited sense, when the location points are paired at the ends of the sphere diameters. The functional of the arrangement is accepted by the criterion of the maximum mutual distance of points from each other. A reduced system of equations for determining the coordinates of the points of quasi-uniform location is shown, an example for the case of six points is given.

Keywords: Thomson problem, the location on the sphere, configuration, the isotropic design, diametrical cuts, quasirandomness

Введение.

Впервые задача о взаимном расположении заряженных точек (шариков) на сфере была поставлена английским физиком Дж.Дж.Томсоном о чём упоминается в работе [1]. Возможны различные постановки такой задачи, в том числе цели расположения точек могут быть такими, чтобы:

а) сумма всевозможных расстояний стало наибольшим;

б) наименьшее расстояние стало наибольшим;

в) произведение расстояний стало наибольшим [1,7,8].

В настоящей работе рассмотрим некоторые утверждения, относящиеся к пункту а).

Назовём конфигурацией или дизайном [1] расположения шариков на сфере в некоторой системе координат, привязанной к сфере.

Пусть N число точек дизайна. Образуем выпуклый многогранник с вершинами в указанных точках, например, как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данные точки, либо как замыкание внутренности общей части всех полупространств [6,10], лежащих по одну сторону от дизайна, и содержащих не менее трёх точек дизайна.

Очевидно, число взаимных расстояний равно числу сочетаний C_N^2 [6]. Изотропной конфигурацией (изотропным дизайном) назовём такое расположение точек, при котором каждая точка имеет окрестность из соседних точек (т.е. тех, которые непосредственно связаны с исходящими из неё рёбрами). одного размера.

Констатируем тот факт, что изотропные дизайны реализуются для N=2,3,4,6,8,12,20 , т.е. у всех правильных многогранников [2], а вот для случая N=5 изотропную конфигурацию в пространстве (!) уже получить не удастся! Это связано именно с комбинаторными (алгебраическими) ограничениями. Абстрагируясь от имеющих место чисто алгебраических ограничений для изотропной конфигурации точек на сфере, рассмотрим понятие квазиравномерного распределения, как распределения близкого к равномерному в некоторой метрике [3,5,6].

Методы получения приближённых решений задачи Томсона используют многочлены Чебышева, технику задач кластеризации и классификации, а также ряд других приёмов [7,8].

Рассмотрим ограниченную задачу Томсона со следующими допущениями:

1^0. Число точек системы равно **2·n** и они расположены на концах **n** ·диаметральных отрезков (сокращённо - диот) сферы радиуса **r**.

2^0. Предположим, что эти диаметральные отрезки (диоты), - к тому же - лежат в заданных плоскостях, образующих связку; с осью связки, проходящей через северный и южный полюс сферы –а именно осью **Oz** . Т.е. они ортогональны плоскости горизонтальной диаметральной окружности сферы, иначе – плоскости **xOy**.

3^0. заданные плоскости связки делят горизонтальную диаметральную окружность сферы на **n** равных долек, т.е являются последовательно равноотстоящими друг от друга.

Замечание: положение пункта 3^0 сводит возможность слипания точек конфигурации до минимума.

Понятно, что при этом заряды в точках одного диота электрически нейтрализуются. Воспользуемся системой сферических координат (r, φ, ψ) для записи координат полученных точек на сфере [4,5], где

r – расстояние точки от центра сферы;

φ_j – угол поворота j-ой плоскости относительно оси **Ox** в плоскости **xOy** против часовой стрелки;

ψ_j – угол, который образует j-й диот с плоскостью горизонта **xOy.**

Не ограничивая общности задачи, положим $r=1$.

Обозначим j-й диот символами P_jQ_j , где P_j – начало, а Q_j – конец j-го диота, $j=1,n$. Тогда, соответственно,

$$P_j\,(\cos(\psi_j)\cdot\cos(\varphi_j);\ \cos(\psi_j)\cdot\sin(\varphi_j);\ \sin(\psi_j)), \tag{1}$$

$$Q_j(-\cos(\psi_j)\cdot\cos(\varphi_j);\ -\cos(\psi_j)\cdot\sin(\varphi_j);\ -\sin(\psi_j)), \tag{2}$$

ввиду центральной симметрии этих точек.

Ввиду вышесказанного в п. 3^0 , запишем

$$\varphi_j = (\pi\cdot j)/n \tag{3}$$

Поэтому число свободных для вариации параметров равно (n-1), т.к. угол ψ_1 можно зафиксировать и положить равным нулю.

Очевидно, что путём переименования точек P_j и Q_j между собой, можно, для любой конфигурации диотов, расположить все точки $\{ P_j \}$ в верхней полусфере, а все точки $\{ Q_j \}$ – в нижней полусфере. И, при этом, эти два расположения будут центрально симметричны по отношению друг к другу.

Какие же имеются связи (уравнения) для определения этих (n-1) параметров?

Если обозначить радиус-векторы точек конфигурации через $\overrightarrow{OP}_j$ и $\overrightarrow{OQ}_j$, можно записать комплекс соотношений для статического квазиоднородного расположения точек на сфере. Это в частности:

(1) Центр тяжести системы должен совпадать с центром шара, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\overrightarrow{OP}_j + \overrightarrow{OQ}_j\right) = 0 \qquad (4)$$

(2) Потенциальная энергия системы точечных зарядов [8], имеющая вид

$$U = \sum_{i<j=1}^{n}\left[\frac{1}{\left|P_i P_j\right|} + \frac{1}{\left|P_i Q_j\right|}\right] \to \min \qquad (5)$$

<u>Замечания:</u>

(i)такая сокращённая запись получается из-за симметрии конфигурации.

(ii) условие (1) выполняется автоматически ввиду того, что конфигурация состоит из **n** диотов.

(iii)если в качестве меры взаимоудалённости конфигурации выбрать функционал, дающий сумму квадратов расстояний точек конфигурации между собой, то получится постоянная величина, т.к. для любых индексов j и k $(P_jQ_k)^2 + (P_jP_k)^2 = 4\cdot r^2 = const$.

Это следует из того факта, что угол $Q_kP_jP_k$ всегда опирается на диаметр и равен $\pi/2$. Выразим явно знаменатели из (5):

$$|P_iP_j| = [(\cos(\psi_i)\cdot\cos(\varphi_i) - \cos(\psi_j)\cdot\cos(\varphi_j))^2 + (\cos(\psi_i)\cdot\sin(\varphi_i) - \cos(\psi_j)\cdot\sin(\varphi_j))^2 + (\sin(\psi_i) - \sin(\psi_j))^2\,]^{1/2} = 2 - t_i\cdot t_j\cdot\cos(\pi(i-j)/n) - 2\cdot(1-t_i^2)^{1/2}(1-t_j^2)^{1/2} \qquad (6)$$

$$|P_iQ_j| = 2 + t_i\cdot t_j\cdot\cos(\pi(i-j)/n) + 2\cdot(1-t_i^2)^{1/2}(1-t_j^2)^{1/2} \qquad (7)$$

где обозначено:

$$t_i = \cos(\psi_i) \text{ и } t_j = \cos(\psi_j) \qquad (8)$$

Условие минимума потенциала U может быть записано как условие равенства нулю дифференциала U, т.е. dU = 0 ,или, по-другому:

$$\frac{\partial U}{\partial t_k} = o \text{ для k=1,n} \qquad (9)$$

Соотношения (9) дают систему из **n** уравнений, решая которую - одним из приближённых методов [3,7], - находим необходимые косинусы углов $\mathbf{t_k}$, а затем и сами углы $\boldsymbol{\psi_k}$.

Замечание:

(i) ввиду нелинейности системы уравнений (9), решений может быть много;

(ii) для случая n = 6 вышеуказанная система может быть решена и одним из решений будет конфигурация вершин правильного октаэдра.

Библиографический список

1. Андреев Н.Н. Расположение точек на сфере с минимальной энергией. //Труды Математического института им. В.Л, Стеклова. РАН. 1997 том 219, с.27-31

2. Андреев Н.Н., Юдин В.А., Экстремальное расположение точек на сфере. // Математическое просвещение (третья серия), вып.1, М., МЦНМО, 1997, с.115-121

3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М., Наука, 1965. 407 с.

4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М., Наука, 1969. 367 с.

5. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.. Мир, 1965. 276 с.

6. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве — М.; 1958.

7. Хачумов М.В. Расстояния, метрики и кластерный анализ. // Искуственный интеллект и принятие решений, №1, 2012, с. 81-89

8. Юдин В.А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов. // Дискретная математика. 1992, том 4, вып. 2

9. Юдин В.А. Расположение точек на торе и экстремальные свойства полиномов.// Тр. МИАН, 1997.// том 219, 453–463.

10. Циглер Г.М., Теория многогранников.– М., МЦНМО, 2014. 565 с.

Оригинальность 93%