УДК: 514.8+537.8

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ZILCH-ТЕНЗОРА ЛИПКИНА

Тришин В. Н.
к. ф.-м.н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Москва, Россия

Тришина Н. Е.
к. ф.-м.н., доцент,
Российский химико-технологический университет им. Д. И. Менделеева,
Москва, Россия

Аннотация.
В статье получено разложение на неприводимые представления группы Лоренца zilch-тензора Липкина свободного электромагнитного поля. Показано, что из двух неприводимых компонент одна полностью определяется тензором энергии-импульса поля Максвелла.

Ключевые слова: zilch-тензор, неприводимые представления, спиноры.

IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE LIPKIN'S ZILCH-TENSOR

Trishin V. N.
PhD, Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Trishina N. E.
PhD, Associate Professor,

Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,
Moscow, Russia

Abstract.
In the article, a decomposition into irreducible representations under the Lorentz group of the Lipkin zilch-tensor for a free electromagnetic field is obtained. It is shown that one of the two irreducible components is completely determined by the energy-momentum tensor of the Maxwell field**.**
Keywords: zilch-tensor, irreducible representations, spinors.

Хорошо известно, что симметричные спиноры неприводимы при преобразованиях из спиновой группы $SL(2,\mathbb{C})$ – двукратной накрывающей группы Лоренца [1]. Этот факт позволяет строить неприводимые тензоры, соответствующие разложению тензорной величины на неприводимые компоненты.

В данной заметке мы получаем разложение на неприводимые компоненты zilch-тензора Липкина свободного электромагнитного поля в общей теории относительности. Zilch-тензор $Z^{\mu\nu}{}_{\rho}$ имеет вид [2, 3]

$$Z^{\mu\nu}{}_{\rho} = {}^{*}F^{\mu\alpha}\nabla_{\rho}F_{\alpha}{}^{\nu} - F^{\mu\alpha}\nabla_{\rho}{}^{*}F_{\alpha}{}^{\nu}. \tag{1}$$

Здесь ∇_{μ} – ковариантная производная относительно связности Леви-Чивита, а $F_{\mu\nu}$ – тензор напряжённости свободного электромагнитного поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла

$$\nabla^{\alpha}F_{\alpha\mu} = 0, \qquad \nabla^{\alpha}{}^{*}F_{\alpha\mu} = 0, \tag{2}$$

где введён дуальный тензор ${}^{*}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

Спинорное представление выражения (1) имеет вид [4]

$$Z^{\mu\nu}{}_{\rho} = 2i(\bar{\varphi}^{A'B'}\nabla_{CC'}\varphi^{AB} - c.c.) \tag{3}$$

где электромагнитный спинор φ_{AB} определяется разложением $F_{\mu\nu} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$, а символы $c.c.$ обозначают комплексно-сопряжённые величины, стоящие слева от символов. Горизонтальная черта над величиной означает её комплексное сопряжение.

Представляя zilch-тензор, записанный в спинорной форме (3), в виде суммы полностью симметричного спинора и тензорного произведения ε-спиноров и симметричных спиноров более низкой валентности, получим следующие неприводимые тензоры:

$$^{1}Z_{\mu\nu\rho} = 2i(\bar{\varphi}_{(A'B'}\nabla_{C')C}\varphi_{AB} - c.c.) \tag{4}$$

и

$$^{2}Z_{\mu\nu\rho} = -\frac{4}{3}i(\varepsilon_{C'(A'}\bar{\varphi}_{B')X'}\nabla^{X'}{}_{C}\varphi_{AB} - c.c.), \tag{5}$$

где учтено, что электромагнитный спинор φ_{AB} удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = 0, \tag{6}$$

эквивалентным условию $\nabla_{A'A}\varphi_{BC} = \nabla_{A'(A}\varphi_{BC)}$. Таким образом, zilch-тезор (3) можно разложить в сумму двух неприводимых тензоров $Z_{\mu\nu\rho} = {}^{1}Z_{\mu\nu\rho} + {}^{2}Z_{\mu\nu\rho}$.

Используя уравнения Максвелла (6) второй неприводимый тензор (5) можно выразить через тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\varphi_{AB}\bar{\varphi}_{A'B'}, \quad (7)$$

а именно

$${}^{2}Z_{\mu\nu\rho} = \frac{8\pi i}{3}(\nabla_{A}{}^{X'}T_{BCX'(A'}\varepsilon_{B')C'} - c.c.). \quad (8)$$

Полученное спинорное выражение для ${}^{2}Z_{\mu\nu\rho}$ соответствует тензорному представлению

$${}^{2}Z_{\alpha\beta\gamma} = \frac{2\pi}{3}(\varepsilon_{\gamma\alpha}{}^{\mu\nu}\nabla_{[\mu}T_{\nu]\beta} + \varepsilon_{\gamma\beta}{}^{\mu\nu}\nabla_{[\mu}T_{\nu]\alpha}) \quad (9)$$

в чём можно убедиться прямыми вычислениями.

Таким образом, мы показали, что из двух неприводимых компонент zilch-тензора электромагнитного поля, один неприводимый тензор ${}^{2}Z_{\alpha\beta\gamma}$ полностью определяется тензором энергии-импульса. Другой неприводимый тензор

$${}^{1}Z_{\mu\nu\rho} = 2i(\bar{\varphi}_{(A'B'}\nabla_{C')C}\varphi_{AB} - c.c.)$$

представляет независимую новую величину, которая задаёт в пространстве Минковского сохраняющийся ток первого порядка, независимый от тензора энергии-импульса.

Библиографический список

1. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol 1: Two-spinor calculus and relativistic fields. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1984.
2. Lipkin D. M. Existence of a new conservation law in electromagnetic theory //

Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 5, no. 5. P. 696–700.

3. Kibble T. W. B. Conservation laws for free fields // Journal of Mathematical Physics. 1965. Vol. 6, no. 7. P. 1022 – 1026.
4. Feldman K. S. The zilch in general relativity // Il Nuovo Cimento. 1965. Vol. XXXVII, no. 1. P. 104–109.

Оригинальность 95%