

УДК 531.6.011.32:532.582.4:517.958

***ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ТЕЛА СИМПЛЕКСНОЙ ФОРМЫ
ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДОЗВУКОВОГО
ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ С ОТРЫВОМ В ОБЛАСТИ ДОННОГО СРЕЗА***

Тимофеев В. Н.

к.т.н., доцент,

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Аннотация

В работе рассмотрены некоторые аспекты математического моделирования отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел. Согласно концепции вязко-невязкого взаимодействия скорости и давления, на исследуемой поверхности тела находились по результатам расчета невязкого обтекания эквивалентного тела. Рассматривались подходы, связанные с построением поверхности эквивалентного тела с конечными и полубесконечными хвостовыми частями. Для численного моделирования использовался метод дискретных вихрей. Донное давление находилось с помощью формулы Хорнера. Представлены результаты математического моделирования обтекания цилиндрических тел с головной частью оживальной формы.

Ключевые слова: математическое моделирование, дозвуковое отрывное обтекание, концепция вязко-невязкого взаимодействия, эквивалентное тело, метод дискретных вихрей.

***APPLICATION OF AN EQUIVALENT BODY OF SIMPLEX FORM
WITH THE MATHEMATICAL SIMULATION OF THE SUBSONIC FLOW
AROUND BODIES WITH THE DETACHMENT IN THE REGION OF
GROUND SHEAR***

Timofeev V.N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Annotation

Work examines some aspects of the mathematical simulation of the tear-off subsonic flow around axisymmetrical tel. According to the concept of binding- inviscid interaction the speeds and the pressure on the body surface being investigated were located through the results of calculating the inviscid flow around equivalent body. Were examined the approaches, connected with the construction of the surface of equivalent body with the final and semi-infinite tail sections. For the numerical simulation the method of single vortices was used. Base pressure was located with the aid of Horner's formula. The results of the mathematical simulation of the flow around cylindrical bodies with the head part of the ogival form are represented.

Keywords: mathematical simulation, subsonic detached flow, the concept of binding- inviscid interaction, equivalent body, the method of single vortices

Сложность физических процессов, которыми сопровождается процесс отрыва потока при пространственном обтекании тел, обуславливает большие затраты вычислительных мощностей при математическом моделировании [1-6]. С целью снижения трудоемкости расчетов в соответствии с основными положениями концепции вязко-невязкого взаимодействия [7] была разработана методика [8] моделирования дозвукового пространственного обтекания удлиненных тел с отрывом потока в области донного среза. Согласно этой методике скорости и давления на омываемой поверхности определялись по результатам расчетов невязкого обтекания некоторого тела, называемого эквивалентным. Считалось что, эквивалентное тело состоит из носовой и хвостовой частей, каждая из которых в свою очередь может быть разделена на

несколько участков. Объединение поверхностей носовой части Σ_1 и хвостовой части Σ_2 осуществлялось на линии стыковки L_c (рис. 1).

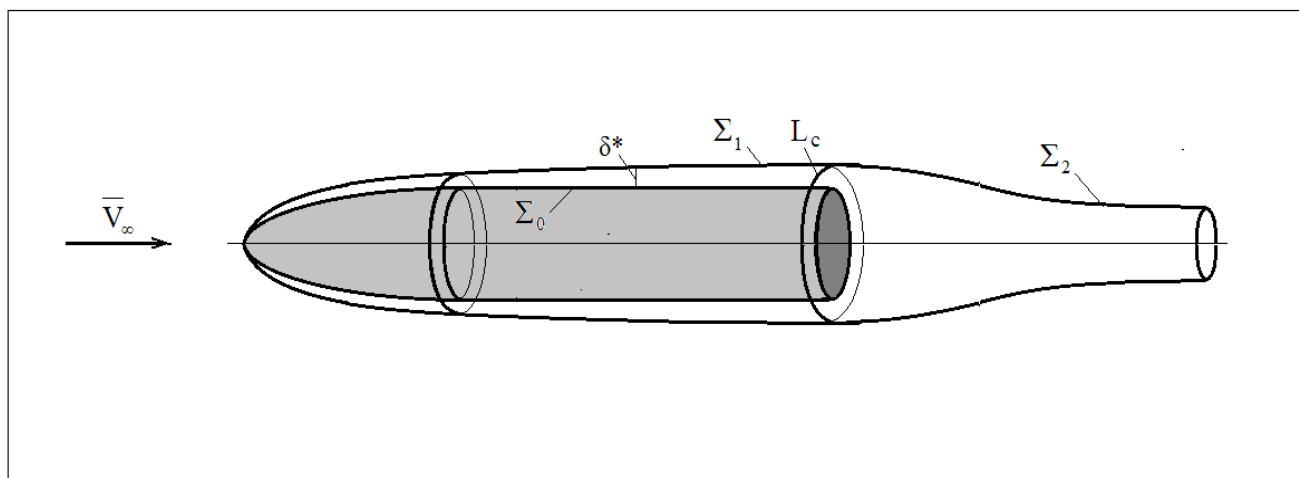


Рис. 1. Эквивалентное тело с хвостовой частью бесконечной длины.

В данной статье дается более подробное освещение подходов, использованных при создании упомянутой методики, и в первую очередь вопросов связанных с построением поверхности эквивалентного тела.

При полномасштабном воплощении в расчетах концепции вязко-невязкого взаимодействия для построения носовой части эквивалентного тела необходимо осуществить смещение соответствующих точек поверхности обтекаемого тела в направлении нормали на толщину вытеснения пограничного слоя. Точки, принадлежащие линии стыковки L_c , также окажутся смещенными относительно соответствующих точек линии отрыва потока L_0 на расстояния, равные толщине вытеснения пограничного слоя.

Как следует из теории пограничного слоя, при выполнении указанного смещения давление в произвольной точке поверхности обтекаемого тела будет равняться давлению в соответствующей точке поверхности носовой части эквивалентного тела. При этом распределение давления на поверхности

эквивалентного тела следует находить с учетом формы поверхности его хвостовой части, которая моделирует влияние спутного следа, образующегося вниз по потоку за линией отрыва потока.

Конфигурация хвостовой части заранее неизвестна, поэтому возникает необходимость задания формы её поверхности Σ_2 в первом приближении и последующего проведения многоступенчатого, а поэтому весьма громоздкого, итерационного цикла расчетов по согласованию форм носовой и хвостовой частей эквивалентного тела.

Первый подход, дающий возможность снизить трудоемкость расчетов, основывался на следующих соображениях. Во многих случаях, например, если рассчитанные по скорости набегающего потока числа Рейнольдса превышают значение 10^6 , толщины вытеснения пограничного слоя оказываются малыми по сравнению с поперечными размерами обтекаемых тел. Поэтому указанное выше смещение точек на толщину вытеснения пограничного слоя можно не производить. Следовательно, можно считать, что поверхность (Σ_1) переднего участка эквивалентного тела совпадает с поверхностью (Σ_0) обтекаемого тела (см. рис. 1).

Суть второго подхода, позволяющего существенно сократить затраты вычислительных мощностей, состояла в отказе от громоздкого итерационного согласования форм носовой и хвостовой частей эквивалентного тела. Отсутствие расчетных данных о форме поверхности хвостовой части эквивалентного тела диктовало необходимость задания этой формы. Было предложено определять конфигурацию хвостовой части априорно на основе данных из литературных источников или на ряде дополнительных положений.

В рамках указанных подходов задача обтекания эквивалентного тела внешним невязким потоком может рассматриваться как приближенное решение задачи о дозвуковом отрывном обтекании тела заданной формы. Основной целью решения данной задачи является получение распределения скорости и

давления на поверхности обтекаемого тела. Для её решения методика моделирования дозвукового пространственного обтекания удлиненных тел с отрывом потока в области донного среза при использовании эквивалентного тела была разработана в двух вариантах: с хвостовой частью конечной длины [9] и полубесконечной хвостовой частью [10]. Как следует из результатов математического моделирования, представленных в данных работах, оба варианта хорошо подходят для оперативной оценки распределения скорости и давления на поверхности обтекаемого тела заданной формы. Естественно, что вариант с хвостовой частью конечной длины требует меньших затрат вычислительных ресурсов. Вместе с тем, согласно рекомендациям работы [7] хвостовая часть эквивалентного тела должна представлять собой полубесконечное тело вытеснения, поперечный размер которого при удалении вниз по потоку от донного среза достигает на бесконечности некоторого конечного значения. Поэтому, если в процессе математического моделирования не исключается проведение итерационных процедур уточнения геометрической формы поверхности хвостовой части, то предпочтение следует отдать варианту с полубесконечной хвостовой частью.

Рассматривалось установившееся обтекание тела потоком газа с умеренными дозвуковыми скоростями. Поэтому среда считалась несжимаемой и невесомой жидкостью. Динамика такой среды описывалась уравнениями неразрывности и движения в форме Эйлера. Граничные условия представлялись в виде условий непротекания поверхности эквивалентного тела Σ и затухания возмущений на бесконечности. Предполагалось, что вне поверхности эквивалентного тела Σ течение потенциально. Поэтому в произвольной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ вектор скорости потока определялся как $V(M_0) = V_\infty + \nabla\varphi(M_0)$, где $\varphi(M_0)$ - потенциал возмущенной скорости; ∇ - оператор Гамильтона. Потенциал $\varphi(M_0)$ находился как решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(M_0) = 0, & M_0 \notin \Sigma; \\ \left. \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = -\mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{n}(M_0)|_{\Sigma}, & M_0 \in \Sigma; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \varphi(M_0) = 0; \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \nabla\varphi(M_0) = 0. \end{cases}$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ - оператор Лапласа; $\mathbf{n}(M_0)|_{\Sigma}$ - орт вектора нормали к поверхности Σ в точке M_0 ; $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. Решение задачи внешней задачи Неймана искалось в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi(M_0) = \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(M)}{r^3} g(M) d\sigma ;$$

здесь $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, в которой вычисляются потенциал возмущенных скоростей и вектор скорости потока; $\mathbf{n}(M)$ и $g(M)$ - орт вектора нормали к поверхности Σ и поверхностная плотность потенциала двойного слоя, которые определяются в точке $M(x, y, z)$, принадлежащей элементу поверхности $d\Sigma$ с площадью $d\sigma$; \mathbf{r} - вектор, соединяющий точку M с точкой M_0 ; $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - модуль вектора \mathbf{r} .

Потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию затухания возмущений. Для определения поверхностной плотности потенциала двойного слоя $g(M)$ применялось численное моделирование. Поверхность эквивалентного тела аппроксимировалась набором многоугольников Σ_k , $k = 1, \dots, N_s$, где N_s - суммарное количество таких многоугольников, называемых также панелями. На панели Σ_k плотность $g(M)$ считалась постоянной величиной g_k . Учитывалось, что градиент потенциала двойного слоя панели Σ_k при постоянной поверхностной плотности g_k равен вектору скорости, индуцированной вихревой нитью L_k ,

расположенной на границе $\partial\Sigma_k$ и имеющей постоянную циркуляцию $\Gamma_k = -g_k$. Скорость, индуцируемая замкнутой вихревой нитью, определяется интегрированием по формуле Био-Савара. Поэтому в рассмотрение вводились векторы $\mathbf{w}_k(M_0)$, $k=1, \dots, N_s$, называемые векторами функции скорости, индуцированной в точке M_0 вихревыми многоугольниками L_k , расположенными на границе $\partial\Sigma_k$ панели Σ_k . Они вычислялись по формуле Био-Савара

$$\mathbf{w}_k(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

где $d\mathbf{s}$ - элемент вихревой линии L_k ; \mathbf{r} - вектор, соединяющий точку $M(x, y, z)$, принадлежащую элементу $d\mathbf{s}$, с точкой M_0 ; $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ - модуль вектора \mathbf{r} .

Представление вектора скорости потока в виде $\mathbf{V}(M_0) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{k=1}^{N_s} \Gamma_k \mathbf{w}_k(M_0)$

позволяло применять метод дискретных вихрей [1],[11].

Граничные условия непротекания удовлетворялись в контрольных точках C_ν , $k=1, \dots, N_s$, расположенных на панелях Σ_ν , и преобразовывались в систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_{\nu k} \Gamma_k = b_\nu, \quad \nu = 1, \dots, N_s,$$

где $a_{\nu k} = \mathbf{w}_k(C_\nu) \cdot \mathbf{n}(C_\nu)$, $\nu = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$; $b_\nu = -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}(C_\nu)$, $\nu = 1, \dots, N$

Из решения этой системы с применением регуляризирующей функции, используемой в методе дискретных вихрей [12], находились циркуляции Γ_k , $\nu = 1, \dots, N$ вихревых многоугольников L_k .

В контрольных точках находился вектор разрыва градиента потенциала двойного слоя $\Delta \vec{V}(C_\nu)$. Векторы скорости потока в контрольных точках

вычислялись как предельные значения градиента потенциала двойного слоя

$$\vec{V}(C_v) = \vec{V}_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \vec{w}_k(C_v) + \frac{1}{2} \Delta \vec{V}(C_v) .$$

Коэффициенты давления находились из интеграла Бернулли:

$$c_p = 1 - (V/V_\infty)^2 , \text{ где } V/V_\infty - \text{ модуль безразмерной скорости .}$$

В качестве иллюстрации представлены результаты математического моделирования обтекание цилиндрических тел с головными частями оживальной формы. Безразмерные длины тела и его головной и цилиндрической частей l_t , l_g и l_c получались отнесением к диаметру миделевого сечения. При нулевых углах атаки форма поверхности хвостового участка эквивалентного тела определялась характерной длиной l_s и диаметром d_s . Использование формулы Хорнера для коэффициента донного сопротивления и соотношений теории дальнего следа позволило найти l_s , d_s в зависимости от l_g , l_c . и от числа Рейнольдса [9]. На рис. 2 при $l_g = 1$, $l_c = 2$, $Re = 2 \cdot 10^7$ показаны конфигурация эквивалентного тела (уходящий направо вниз по потоку полубесконечный участок хвостовой части не изображен), расчетная сетка, составленная из вихревых многоугольников L_k , и распределение коэффициента давления C_p на поверхности эквивалентного тела (линия стыковки L_c увеличенную толщину).

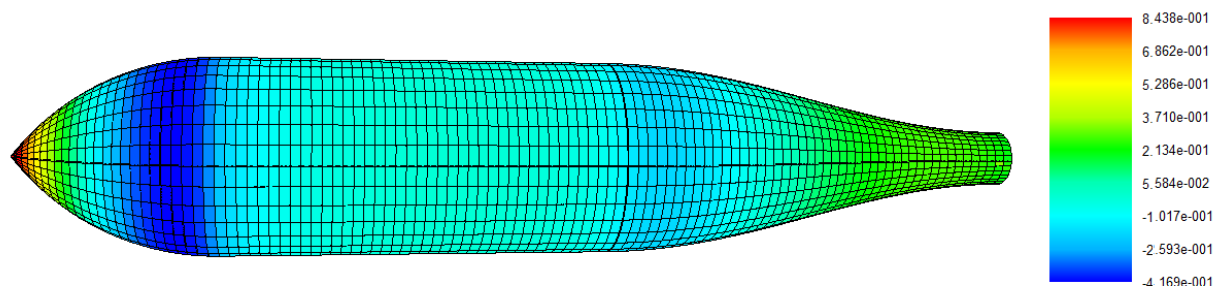


Рис. 2. Форма эквивалентного тела и распределение коэффициента давления

Таким образом, представленная методика математического моделирования дозвукового обтекания тел с отрывом потока, локализованным в окрестности донного среза, может быть рекомендована для оперативного анализа распределения давления на поверхности обтекаемого тела.

Библиографический список

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Котовский В.Н., Федоров Р.М. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы. Москва, ЦАГИ, 2000, 265 с.
2. Lewis R.I. Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems. Cambridge University Press, 2005, 592p.
3. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. Москва, Ин-т механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006, 184 с.
4. Щеглов Г.А. Модификация метода вихревых элементов для расчета гидродинамических характеристик гладких тел. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение, 2009, № 2, с. 26–36.

5. Дергачев С.А., Щеглов Г.А. Моделирование обтекания тел методом вихревых элементов с использованием замкнутых вихревых петель. Научный вестник МГТУ ГА, 2016, № 223, с. 19–27.
6. Kuzmina, K.S., Marchevsky, I.K. and Moreva, V.S. On vortex sheet intensity computation for airfoils with angle point in vortex methods. International Journal of Mechanical Engineering and Technology. (2018) 9:2, pp. 799-809.
7. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. Основные свойства и расчет модели. Москва, Наука, 1990, 384 с.
8. Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. Инженерный журнал: наука и инновации, 2014, вып. 10. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html> (дата обращения 17.01.2018).
9. Тимофеев В.Н., Бушуев А.Ю. Математическое моделирование дозвукового обтекания тел с отрывом потока в донной области. Вестник СГТУ, 2012, № 1 (64), вып. 2, с. 11–14.
10. Тимофеев В.Н. Построение полубесконечного эквивалентного тела при математическом моделировании дозвукового отрывного осесимметричного обтекания. Математическое моделирование и численные методы, 2016, № 4 (12), с. 67–83.
11. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с.
12. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы, Гылым, 1997, 448 с.

Оригинальность 73%