УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Акимов А. А.,

к.ф.-м.н. наук, доцент,

студент,

Стерлитамакский филиал БашГУ,

г. Стерлитамак, Россия

Сахибгареев А.И

студент,

Стерлитамакский филиал БашГУ,

г. Стерлитамак, Россия

Сафин Э.М.,

к.ф.-м.н. наук,

филиал «Уфимский государственный нефтяной технический университет» в г. Салавате,

Салават, Россия

Аннотация

В работе исследована единственность решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с действительным спектральным параметром λ с двумя линиями изменения типа. Найдены условия на λ , при которых решение единственно.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Трикоми, уравнение Лаврентьева-Бицадзе, функция Бесселя.

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF A TRIMONY FOR THE EQUATION LAVRENTIEVA - BITZADZE WITH REAL PARAMETER

Akimov A.A.
PhD, Associate Professor,
Sterlitamak branch Bashkir state university
Sterlitamak, Russia
Sahibgareev A.I
student,
Sterlitamak branch Bashkir state university,
Sterlitamak, Russia
Safin E. M.
PhD,
Branch of Ufa State Petroleum Technological University in Salavat,
Salavat, Russia

Annotation
We study the uniqueness of the solution of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with a real spectral parameter with two lines of type change. Conditions are found for which the solution is unique.
Keywords: mixed-type equation, Tricomi problem, Lavrent'ev-Bitsadze equation, Bessel function

Постановка задачи.Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv \mathrm{sgn}\, y \cdot u_{xx} + \mathrm{sgn}\, x \cdot u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{1}$$

где

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_0 = \mu_0^2 \ \ \textit{при} \ x > 0, y > 0, \\ \lambda_1 = \mu_1^2 \ \ \textit{при} \ x > 0, y < 0, \\ \lambda_2 = \mu_2^2 \ \ \textit{при} \ x < 0, y > 0, \end{cases}$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ - заданные действительные параметры, в области $D,$ ограниченной: 1) гладкой кривой Γ, лежащей в первой четверти плоскости (x, y) с концами в точках $A_1(l_1,0)$ и $A_2(0,l_2)$, $l_1,l_2 > 0$; 2) характеристиками OC_1 $(x + y = 0)$ и C_1A_1 $(x - y = l_1)$ уравнения (1) при $x > 0, y < 0;$ 3) характеристиками OC_2 $(x + y = 0)$ и C_2A_2 $(y - x = l_2)$ при $x < 0, y > 0,$ где $C_1 = (\frac{l_1}{2}, -\frac{l_1}{2}), C_2 = (-\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2}), O = (0,0).$

Обозначим

$D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}, D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}, D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}.$

В области D для уравнения (1) поставим следующую задачу Трикоми.

Задача Т. *Найти функцию* $u(x, y),$ *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{1}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \ (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{2}$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y), \ (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

$$u(x, y)|_{C_1C_2} = \psi(x, y), \ (x, y) \in C_1C_2, \tag{4}$$

где φ и ψ - заданные достаточно гладкие функции.

Ранее разными авторами изучалась задача Трикоми для модельных уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \tag{5}$$

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \tag{6}$$

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy) \cdot u_{yy} - \mu^2 u = 0, \tag{7}$$

$$Lu \equiv \mathrm{sgn}(xy) \cdot u_{xx} + u_{yy} - \mu^2 u = 0, \tag{8}$$

где $\mu^2 = const$ - действительный или комплексный параметр.

В работе [8] получено, что задача Трикоми для уравнения (7) имеет единственное решение при $\mu^2 > 0$.

В работе [9] показано, что задача Трикоми для уравнения (9) имеет единственное решение при $\mathrm{Re}\,(\mu^2) > 0,\ -2\sqrt{2} \le \dfrac{\mathrm{Jm}\,(\mu^2)}{\mathrm{Re}\,(\mu^2)} \le 2\sqrt{2},$ где $\mu^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$. т.е. в случае действительного параметра μ^2 единственность доказана при $\mu^2 > 0$.

Очевидно, уравнение (1) обобщает все уравнения (6) - (9):

1) уравнение (6) получается из (1) при $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \mu^2$;

2) уравнение (7) получается из (1) при $-\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \mu^2$;

3) уравнение (8) получается из (1) при $-\lambda_0 = \lambda_1 = -\lambda_2 = \mu^2$;

4) уравнение (9) получается из (1) при $\lambda_0 = \lambda_1 = -\lambda_2 = \mu^2$;

§2. Вспомогательные утверждения

Определение. Под регулярным решением уравнения (1) в области D понимается функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям (2), (3) и имеющая непрерывные частные производные u_x и u_y в $\overline{D}_0$, за исключением, быть может, точек O, A_1, A_2, где они могут иметь особенности интегрируемого порядка.

В областях D_1 и D_2 для уравнения (1) рассмотрим следующие задачи Дарбу:

Первая задача Дарбу. 1). Найти в области D_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \tau_1(x),\ \ x \in [0, l_1], \tag{9}$$

$$u(x,-x)=0,\ \ x\in[0,\frac{l_1}{2}], \tag{10}$$

где $\tau_1(x)$ - заданная функция.

2). Найти в области D_2 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ \ y\in[0,l_2], \tag{11}$$

$$u(y,-y)=0,\ \ y\in[0,\frac{l_2}{2}], \tag{12}$$

где $\tau_2(y)$ - заданная функция.

Вторая задача Дарбу. 1) Найти в области D_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (11) и

$$u_y(x,0)=\nu_1(x),\ \ x\in(0,l_1), \tag{13}$$

где $\nu_1(x)$ - заданная функция.

2) Найти в области D_2 решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (13) и

$$u_x(0,y)=\nu_2(y),\ \ y\in(0,l_2), \tag{14}$$

где $\nu_2(y)$ - заданная функция.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. 1) *Если* $\tau_1(x)\in C[0,l_1]\cap C^2(0,l_1),\ \tau_1'(x)\in L_1[0,l_1],\ \tau_1(0)=0,$ *то существует единственное решение задачи* (1), (10) *и* (11), *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\tau_1(x+y)+\mu_1 y\int_0^{x+y}\tau_1(t)\frac{J_1\left[\mu_1\sqrt{(x+y-t)(x-y-t)}\right]}{\sqrt{(x+y-t)(x-y-t)}}dt, \tag{15}$$

где $J_1(z)$ - функция Бесселя.

2) *Если* $\tau_2(y)\in C[0,l_2]\cap C^2(0,l_2),\ \ \tau_2'(y)\in L_1[0,l_2],\ \ \tau_2(0)=0,$ *то существует*

единственное решение задачи (1), (12) *и* (13), *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\tau_2(y+x)+\mu_2 x\int_0^{y+x}\tau_2(t)\frac{J_1\left[\mu_2\sqrt{(y+x-t)(y-x-t)}\right]}{\sqrt{(y+x-t)(y-x-t)}}dt. \qquad (16)$$

Теорема 2. 1) *Если* $\nu_1(x)\in \mathrm{C}^1(0,l_1)\cap L_1[0,l_1]$, *то существует единственное решение задачи* (1), (11) *и* (14), *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\int_0^{x+y}\nu_1(t)J_0\left[\mu_1\sqrt{(x+y-t)(x-y-t)}\right]dt, \qquad (17)$$

2) *Если* $\nu_2(x)\in \mathrm{C}^1(0,l_2)\cap L_1[0,l_2]$, *то существует единственное решение задачи* (1), (13) *и* (15), *и оно определяется формулой*

$$u(x,y)=\int_0^{y+x}\nu_2(t)J_0\left[\mu_2\sqrt{(y+x-t)(y-x-t)}\right]dt, \qquad (18)$$

Доказательство теорем 1пункт 1) и 2 пункт 1) приведено в [7], а формулы (17) и (19) получаются из (16) и (18) заменой x на y, y на x в силу симметричности уравнения (1) и областей D_1 и D_2 относительно прямой $y=x$.

Из формулы (16) получим:

$$u_y(x,0)=\nu_1(x)=\tau_1'(x)+\mu_1\int_0^{x}\frac{J_1\left[\mu_1(x-t)\right]}{x-t}\tau_1(t)dt, \quad 0<x<l_1. \qquad (19)$$

Аналогично из (17) будем иметь:

$$u_x(0,y)=\nu_2(y)=\tau_2'(y)+\mu_2\int_0^{y}\frac{J_1\left[\mu_2(y-t)\right]}{y-t}\tau_2(t)dt, \quad 0<y<l_2. \qquad (20)$$

С учетом формул (18) и (19) получим

$$\tau_1(x)=\int_0^{x}J_0\left[\mu_1(x-t)\right]\nu_1(t)dt, \quad 0\le x\le l_1, \qquad (21)$$

$$\tau_2(y)=\int_0^{y}J_0\left[\mu_2(y-t)\right]\nu_2(t)dt, \quad 0\le y\le l_2. \qquad (22)$$

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если* $\lambda_1 = \mu_1^2 \geq 0,$ *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место при любом* $x \in [0, l_1]$ *неравенство*

$$J_1 = \int_0^x u(t,0) u_y(t,0) dt = \int_0^x \tau_1(t) \nu_1(t) dt \geq 0. \tag{23}$$

Доказательство. С учетом (20) преобразуем интеграл:

$$J_1 = \int_0^x \tau_1(t) \left(\tau_1'(t) + \mu_1 \int_0^t \frac{J_1[\mu_1(t-s)]}{t-s} \tau_1(s) ds \right) dt = \frac{1}{2}\tau_1^2(x) + \mu_1 \int_0^x \tau_1(t) \int_0^t \frac{J_1[\mu_1(t-s)]}{t-s} \tau_1(s) ds dt. \tag{24}$$

Используем интегральное представление функции Бесселя [1]

$$J_q(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^q \int_0^1 (1-\xi^2)^{q-1/2} \cos(z\xi) d\xi,$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция, $\mathrm{Re} q > -\dfrac{1}{2},$ тогда

$$J_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^1 (1-\xi^2)^{1/2} \cos(z\xi) d\xi.$$

Тогда выражение (25) примет вид

$$J_1 = \frac{1}{2}\tau_1^2(x) + \frac{2\mu_1^2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2} [F_1^2(x,\xi) + F_2^2(x,\xi)] d\xi \geq 0,$$

где

$$F_1(t,\xi) = \int_0^t \tau_1(s) \cos(\mu_1 s\xi) ds, \quad F_2(t,\xi) = \int_0^t \tau_1(s) \sin(\mu_1 s\xi) ds.$$

Тем самым справедливость оценки (24) доказана.

Лемма 2. *Если* $\lambda_2 \geq 0,$ *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место при любом* $y \in [0, l_2]$ *неравенство*

$$J_2 = \int_0^y u(0,t) u_x(0,t) dt = \int_0^y \tau_2(t) \nu_2(t) dt \geq 0. \tag{25}$$

Доказательство. С учетом (20) преобразуем интеграл:

$$J_2=\frac{1}{2}\tau_2^2(y)+\mu_2\int_0^y\tau_2(t)\int_0^t\frac{J_2\left[\mu_2(t-s)\right]}{t-s}\tau_2(s)dsdt. \quad (26)$$

Используем интегральное представление функции Бесселя [1]

$$J_q(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^q\int_0^1(1-\xi^2)^{q-1/2}\cos(z\xi)d\xi,$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция, $\mathrm{R}eq>-\frac{1}{2},$ тогда

$$J_2(z)=\frac{2z}{\pi}\int_0^1(1-\xi^2)^{1/2}\cos(z\xi)d\xi.$$

Тогда выражение (27) примет вид

$$J_2=\frac{1}{2}\tau_2^2(x)+\frac{2\mu_2^2}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}[F_1^2(y,\xi)+F_2^2(y,\xi)]d\xi\geq 0,$$

где

$$F_1(t,\xi)=\int_0^t\tau_2(s)\cos(\mu_2 s\xi)ds, \quad F_2(t,\xi)=\int_0^t\tau_2(s)\sin(\mu_2 s\xi)ds.$$

Тем самым справедливость оценки (26) доказана.

Далее изучим единственность решения задачи T для уравнения (1) при $\lambda_1<0,$ $\lambda_2<0.$ В этом случае $\sqrt{\lambda_1}=\mu_1=i\alpha_1,\ \alpha_1=\sqrt{|\lambda_1|}>0,\ \sqrt{\lambda_2}=\mu_2=i\alpha_2,\ \alpha_2=\sqrt{|\lambda_2|}>0,$ тогда в формулах (22) и (23) перейдем к модифицированным функциям Бесселя:

$$J_0[\sqrt{\lambda_1}(x-t)]=I_0[\alpha_1(x-t)],\ J_0[\sqrt{\lambda_2}(y-t)]=I_0[\alpha_2(y-t)].$$

Лемма 3. *Если* $\lambda_1<0,$ *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место при любом* $x\in[0,l_1]$ *неравенство*

$$J_{a_1}=\int_0^x e^{-2a_1t}u(t,0)u_y(t,0)dt\geq 0,$$

где $a_1=\mathrm{c}onst\geq\alpha_1.$

Доказательство. На основании формулы (22) преобразуем интеграл:

$$J_{a_1} = \int_0^x e^{-2a_1 t} \nu_1(t)dt \int_0^t I_0[\alpha_1(t-s)]\nu_1(s)ds.$$

В последнем интеграле заменим функцию $I_0(z)$ ее интегральным представлением

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{-zt}(1-t^2)^{-1/2}dt,$$

тогда

$$J_{a_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}[f^2(x,\xi)e^{-2x(a_1+\alpha_1\xi)} + 2(a_1+\alpha_1\xi)\int_0^x F^2(t,\xi)e^{-2t(a_1+\alpha_1\xi)}dt]d\xi \geq 0$$

т.к. $a_1 + \alpha_1\xi \geq a_1 - \alpha_1 \geq 0.$

Здесь использовано обозначение $F(t,\xi) = \int_0^t e^{\alpha_1 s\xi}\nu_1(s)ds.$

Лемма 4. *Если* $\lambda_2 < 0$, *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место при любом* $y \in [0, l_2]$ *неравенство*

$$J_{a_2} = \int_0^y e^{-2a_2 t} u(0,t)u_x(0,t)dt \geq 0,$$

где $a_2 = const \geq \alpha_2.$

Доказательство. На основании формулы (22) преобразуем интеграл:

$$J_{a_2} = \int_0^y e^{-2a_2 t}\nu_2(t)dt\int_0^t I_0[\alpha_2(t-s)]\nu_2(s)ds.$$

В последнем интеграле заменим функцию $I_0(z)$ ее интегральным представлением [1]

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{-zt}(1-t^2)^{-1/2}dt,$$

тогда

$$J_{a_2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}[f^2(y,\xi)e^{-2y(a_2+\alpha_2\xi)}+2(a_2+\alpha_2\xi)\int_0^y F^2(t,\xi)e^{-2t(a_2+\alpha_2\xi)}dt]d\xi\geq 0 \text{ т.к.}$$

$a_2+\alpha_2\xi\geq a_2-\alpha_2\geq 0.$

Здесь использовано обозначение $F(t,\xi)=\int_0^t e^{\alpha_1 s\xi}\nu_2(s)ds.$

Лемма 5. *Если* $\lambda_1\geq 0,$ *то для любого регулярного решения уравнения* (1) *имеет место при любом* $x\in[0,l_1]$ *неравенство*

$$J_{a_1}=\int_0^x e^{-2a_1t}u(t,0)u_y(t,0)dt\geq 0,$$

где $a_1=const\geq 0.$

Доказательство. Преобразуем интеграл

$$J_{a_1}=\int_0^x e^{-2a_1t}\nu_1(t)dt\int_0^t J_0[\sqrt{\lambda_1}(t-s)]\nu_1(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\Bigg[F_1^2(t,\xi)e^{-2a_1t}+2a_1\int_0^x e^{-2a_1t}F_1^2(t,\xi)dt+$$

$$+F_2^2(t,\xi)e^{-2a_1t}+2a_1\int_0^x e^{-2a_1t}F_2^2(t,\xi)dt\Bigg]d\xi\geq 0,$$

где

$$F_1(t,\xi)=\int_0^t\nu_1(s)\cos(\sqrt{\lambda_1}s\xi)ds,\quad F_2(t,\xi)=\int_0^t\nu_1(s)\sin(\sqrt{\lambda_1}s\xi)ds.$$

Тем самым справедливость леммы доказана.

Исследование единственности

Случай 1. $\lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0$**.**

Теорема 3. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *в области* D *существует решение задачи T, то оно единственно при всех* $\lambda_1\geq 0,\ \lambda_2\geq 0$ *и*

$\lambda_0 > -p,$ *где* $p = \dfrac{4}{9\mathrm{mes}D_0}$, $\mathrm{mes}D_0$ - *мера области* D_0.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи Т из класса регулярных решений уравнения (1). Отойдем от границы области D_0 внутрь нее на расстояние $\varepsilon > 0$ от кривой Γ и на расстояние $\delta > 0$ от отрезков OA_1 и OA_2, образовавшуюся подобласть обозначим $D_0^{\varepsilon\delta}$.

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_0^{\varepsilon\delta}} u(u_{xx} + u_{yy} - \lambda_0 u)dxdy = 0.$$

После интегрирования по частям и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0, \delta \to 0,$ на основании формулы Грина, с учетом условия $u|_\Gamma = 0,$ получим

$$\iint\limits_{D_0} (u_x^2 + u_y^2 + \lambda_0 u^2)dxdy + \int_0^{l_1} \tau_1(x)\nu_1(x)dx + \int_0^{l_2} \tau_2(y)\nu_2(y)dy = 0. \qquad (27)$$

Отсюда при $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$ в силу лемм 1 и 2 следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_0$. Тогда $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Пусть теперь $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$ и $-p < \lambda_0 < 0$. Тогда из равенства (28) имеем:

$$\iint\limits_{D_0} (u_x^2 + u_y^2)dxdy \le -\lambda_0 \iint\limits_{D_0} u^2 dxdy.$$

С другой стороны, в силу аналога неравенства Пуанкаре – Фридрихса, имеем

$$\iint\limits_{D_0} u^2 dxdy \le \frac{9}{4}\mathrm{mes}D_0 \iint\limits_{D_0} (u_x^2 + u_y^2)dxdy,$$

т.е.

$$\iint\limits_{D_0} (u_x^2 + u_y^2)dxdy \le -\frac{\lambda_0}{p} \iint\limits_{D_0} (u_x^2 + u_y^2)dxdy,$$

$$(1+\frac{\lambda_0}{p})\iint_{D_0}(u_x^2+u_y^2)dxdy \le 0. \qquad (28)$$

Если $1+\frac{\lambda_0}{p}>0,$ то неравенство (29) возможно лишь при $u(x,y)\equiv 0.$

Отсюда при $-p<\lambda_0<0$ и $\lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0$ следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в D. Теорема доказана.

Случай 2. $\lambda_1<0, \lambda_2<0$.

Теорема 4. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *существует решение задачи Т, то оно единственно при всех* $\lambda_1<0, \lambda_2<0$ *и* $\lambda_0>-\lambda_1-\lambda_2-p.$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи Т из класса регулярных решений уравнения (1).

Введем функцию $w(x,y)=\exp(-a_1x-a_2y)u(x,y),$ где $a_1=\sqrt{|\lambda_1|},\ a_2=\sqrt{|\lambda_2|},$ тогда $u(x,y)=\exp(a_1x+a_2y)w(x,y),$

$$u_{xx}=a_1^2w\exp(a_1x+a_2y)+2a_1w_x\exp(a_1x+a_2y)+w_{xx}\exp(a_1x+a_2y),$$

$$u_{yy}=a_2^2w\exp(a_1x+a_2y)+2a_2w_y\exp(a_1x+a_2y)+w_{yy}\exp(a_1x+a_2y).$$

И уравнение примет вид

$$w_{xx}+w_{yy}+2a_1w_x+2a_2w_y+(a_1^2+a_2^2-\lambda_0)w=0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_{D_0^{\varepsilon\delta}} w(w_{xx}+w_{yy}+2a_1w_x+2a_2w_y+(a_1^2+a_2^2-\lambda_0)w)dxdy=0.$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0,\ \delta\to 0,$ получим

$$\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2-(a_1^2+a_2^2-\lambda_0)w^2)dxdy+$$

$$+\int_0^{l_1}e^{-2a_1x}u(x,0)u_y(x,0)dx+\int_0^{l_2}e^{-2a_2y}u(0,y)u_x(0,y)dy=0. \qquad (29)$$

Отсюда в силу лемм 3 и 4 при $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ и $\lambda_0 \ge -(\lambda_1 + \lambda_2)$ следует единственность решения задачи T для уравнения (1).

Пусть теперь $-\lambda_1 - \lambda_2 - p < \lambda_0 < -\lambda_1 - \lambda_2$. Тогда из равенства (30) аналогично доказательству теоремы 3 будем иметь

$$\iint_{D_0}(w_x^2 + w_y^2)dxdy \le -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0)\iint_{D_0} w^2 dxdy \le \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0}{p}\iint_{D_0}(w_x^2 + w_y^2)dxdy,$$

$$(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0}{p})\iint_{D_0}(w_x^2 + w_y^2)dxdy \le 0.$$

Поэтому при условии $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + p > 0$ получим единственность решения задачи T.

Случай 3. $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 < 0$.

Теорема 5. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *существует решение задачи T, то оно единственно при всех* $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_0 > \lambda_1 - \lambda_2 - p$.

Доказательство. Введем функцию $w(x,y) = \exp(-a_1 x - a_2 y)u(x,y)$, где $a_1 = \sqrt{\lambda_1},\ a_2 = \sqrt{|\lambda_2|}$ и рассмотрим интеграл

$$\iint_{D_0^{\varepsilon\delta}} w(w_{xx} + w_{yy} + 2a_1 w_x + 2a_2 w_y + (a_1^2 + a_2^2 - \lambda_0)w)dxdy = 0.$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$, получим

$$\iint_{D_0}(w_x^2 + w_y^2 - (a_1^2 + a_2^2 - \lambda_0)w^2)dxdy +$$

$$+\int_0^{l_1} e^{-2a_1 x}u(x,0)u_y(x,0)dx + \int_0^{l_2} e^{-2a_2 y}u(0,y)u_x(0,y)dy = 0. \qquad (30)$$

Отсюда в силу лемм 4 и 5 при $\lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 < 0$ и $\lambda_0 \ge \lambda_1 - \lambda_2$ следует единственность решения задачи T для уравнения (1).

Пусть теперь $\lambda_1 - \lambda_2 - p < \lambda_0 < \lambda_1 - \lambda_2$. Тогда из равенства (31) получим

$$\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy \le (\lambda_1-\lambda_2-\lambda_0)\iint_{D_0}w^2dxdy \le \frac{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_0}{p}\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy,$$

$$(1-\frac{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_0}{p})\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy \le 0.$$

Поэтому при условии $\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2+p>0$ получим единственность решения задачи Т.

Случай 4. $\lambda_1<0,\ \lambda_2\ge 0$**.**

Теорема 6. *Если в классе регулярных решений уравнения* (1) *существует решение задачи Т, то оно единственно при всех* $\lambda_1<0,\ \lambda_2\ge 0$ *и* $\lambda_0>-\lambda_1+\lambda_2-p.$

Доказательство. Введем функцию $w(x,y)=\exp(-a_1x-a_2y)u(x,y),$ где $a_1=\sqrt{\lambda_1},\ a_2=\sqrt{|\lambda_2|}$ и рассмотрим интеграл

$$\iint_{D_0^{\varepsilon\delta}}w(w_{xx}+w_{yy}+2a_1w_x+2a_2w_y+(a_1^2+a_2^2-\lambda_0)w)dxdy=0.$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0,\ \delta\to 0,$ получим

$$\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2-(a_1^2+a_2^2-\lambda_0)w^2)dxdy+$$

$$+\int_0^{l_1}e^{-2a_1x}u(x,0)u_y(x,0)dx+\int_0^{l_2}e^{-2a_2y}u(0,y)u_x(0,y)dy=0. \qquad (31)$$

Отсюда в силу лемм 4 и 5 при $\lambda_2\ge 0,\ \lambda_1<0$ и $\lambda_0\ge\lambda_2-\lambda_1$ следует единственность решения задачи Т для уравнения (1).

Пусть теперь $\lambda_2-\lambda_1-p<\lambda_0<\lambda_2-\lambda_1.$ Тогда из равенства (32) получим

$$\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy \le (\lambda_2-\lambda_1-\lambda_0)\iint_{D_0}w^2dxdy \le \frac{\lambda_2-\lambda_1-\lambda_0}{p}\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy.$$

$$(1-\frac{\lambda_2-\lambda_1-\lambda_0}{p})\iint_{D_0}(w_x^2+w_y^2)dxdy \le 0.$$

Поэтому при условии $\lambda_0-\lambda_2+\lambda_1+p>0$ получим единственность решения задачи Т.

Рассмотрим частные случаи соотношений между λ_i.

1) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = \lambda$ (т.е. случай уравнения (6)), то решение задачи Трикоми будет единственно при $\lambda_0 \in (-p/3, +\infty)$.

2) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_0 = \lambda$ (уравнение (7)), то решение единственно при $\lambda_0 \in (-p, p)$.

3) Если $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_0 = \lambda$ (уравнение (8)), то решение единственно при $\lambda_0 \in (-p/3, p)$.

4) Если $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_0 = \lambda$ (уравнение (9)), то решение единственно при $\lambda_0 \in (-p/3, p)$.

Таким образом, сравнивая приведенные результаты с [8], видим, что получено уточнение областей единственности решения поставленной задачи (2)-(5).

Библиографический список:

1.Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1974.296 с.

2. Сабитов К.Б., Акимов А.А. К теории аналога задачи Неймана для уравнений смешанного типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2001. № 10. С. 73 - 80.

3. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1981.

4. Акимов А.А., Агафонова А.А. Из истории построения функции Римана-Грина// Современные научные исследования и разработки. 2017. № 7 (15).

С. 35-38.

5. Салахитдинов М.С. Единственность решения задачи Трикоми и нелокальных задач для уравнения Лаврентьева - Бицадзе с двумя перпендикулярными линиями вырождения со спектральным параметром // Труды междунар. конф."Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы" (г. Стерлитамак). Уфа : Гилем, 2003. т.2. С. 107 - 113.

6. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Методика построения функции Римана-Грина // Colloquium-journal. 2017. № 10 (10). С. 76-79.

7.Сабитов, К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, 6. С. 1023 - 1032.

8.Сабитов, К.Б. Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Известия РАН. Серия математическая. 2001. 4.

9. Кальменов, Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева - Бицадзе / Т.Ш. Кальменов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. 8. 1418-1425.

10. Пономарев, С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева - Бицадзе: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С.М. Пономарев. М.: МГУ, 1981.

Оригинальность 70%