

КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Салахова Э.Р.

*Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Пермь, Россия*

Аннотация

В статье рассмотрены свойства комплексного логарифма. Охарактеризовано применение конформного отображения при построении географических карт.

Ключевые слова: логарифм, конформное отображение, географические карты.

COMPLEX LOGARITHM AND ITS APPLICATION

Salakhova E.R.

*Perm State University of Humanities and Education,
Perm, Russia*

Annotation

The article deals with the properties of the complex logarithm. It characterized by the use of conformal mapping in the construction of maps.

Keywords: logarithm, conformal mapping, geographic maps.

Широко известно, что обобщение понятия состоит в переходе от данного понятия к более абстрактному, широкому понятию. Одним из путей обобщения понятий является расширение числового множества. Таким образом, обобщением понятия вещественного логарифма является понятие комплексного логарифма.

Логарифм комплексного числа $z \neq 0$ определяется по формуле $Ln z = \ln|z| + i Arg z$, где $Arg z = \varphi + 2\pi k$ – многозначная функция. Таким образом, комплексный логарифм в каждой точке ($z \neq 0$) принимает бесконечное число различных значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi i, k \in Z$. Из определения логарифма вытекают следующие формулы: $e^{Ln z} = z; Ln e^z = z + 2k\pi i$.

При $k = 0$ получается главная ветвь (главное значение) логарифма $\ln z = \ln|z| + i\varphi$. При $k = \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ получаются другие ветви: $w_1, w_{-1}, w_2, w_{-2}, \dots$. Точка $z = 0$ является логарифмической точкой разветвления. Один обход вокруг нее в положительном направлении переводит главную ветвь в ветвь w_1 , следующий – в w_2 и т. д.. Обход в отрицательном направлении переводит главную ветвь в ветвь w_{-1} , следующий – в w_{-2} и так далее [1].

Часть свойств логарифмов, известных из алгебры, имеют место для комплексного логарифма. Например, тождество $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$). Для комплексного логарифма справедлива формула $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, если аргументы z_1, z_2 и их сумма лежат в интервале $(-\pi, \pi)$.

Конформное отображение, заданное по формуле $z' = \log_e z + i \operatorname{Arg} z$, находит широкое применение в картографии при построении географических карт. Если ко всем точкам карты, выполненной в стереографической проекции, применить конформное преобразование, указанное выше, то она перейдет в новую фигуру, которую также можно рассматривать как географическую карту [2]. Карта, получившаяся в результате такого преобразования, получила большое распространение в навигации. Ее преимущества перед картой, выполненной в стереографической проекции, состоят в том, что здесь не только меридианы, но и параллели изображаются прямыми линиями.

Рассмотрим применение конформных отображений при построении географических карт.

Любая географическая карта призвана отображать определенную часть земной поверхности на плоскости. Естественно, при таком изображении очертания материков, морей и океанов подвергаются искажению. Однако, можно строить карту, не изменяя величины углов между различными линиями на земной поверхности.

Пусть нужно построить карту северного полушария, на которой все углы между различными направлениями на земной поверхности изобразятся в натуральную величину. Чтобы наглядно представить себе, как это можно сделать, вообразим большой земной глобус из какого-либо прозрачного материала, покрашенный непрозрачными красками так, что лишь контуры материков, стран и морей в северном полушарии, а также сетка меридианов и параллелей остаются непокрытыми краской и, следовательно, прозрачными. Если в южном полюсе глобуса впаивана электрическая лампочка, а перед глобусом перпендикулярно к его оси помещен экран, то в темной комнате мы увидим на экране контурную карту северного полушария. Она называется картой в стереографической проекции. Все углы между любыми линиями на глобусе в северном полушарии изобразятся в натуральную величину.

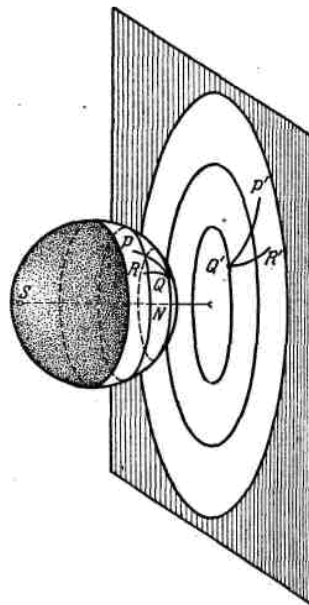


Рис.1

Полученная указанным путем карта представляет некоторую плоскую фигуру; если ее подвергнуть конформному отображению, она перейдет в новую фигуру, которую также можно рассматривать как географическую карту. Так как при конформном отображении углы не изменяются, то на новой карте будут сохраняться натуральные величины углов между направлениями на земной поверхности. На рис. 2 изображена карта

Гренландии в стереографической проекции, а на рис. 3 — карта, которая получается из предыдущей, если ко всем ее точкам применить конформное преобразование по формуле $z' = \log_e z + i \text{Arg } z$.

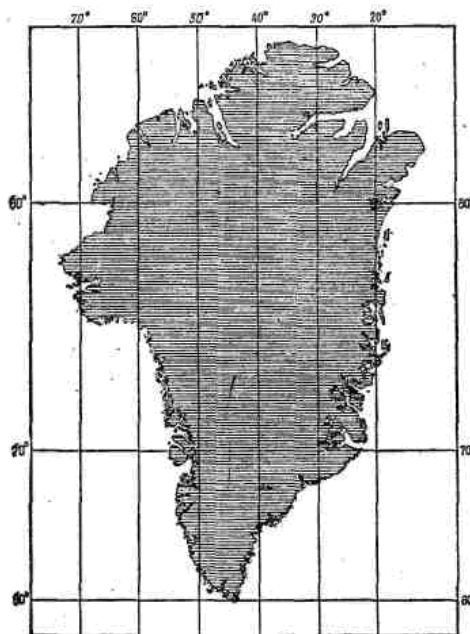


Рис. 2 - Карта Гренландии в стереографической проекции

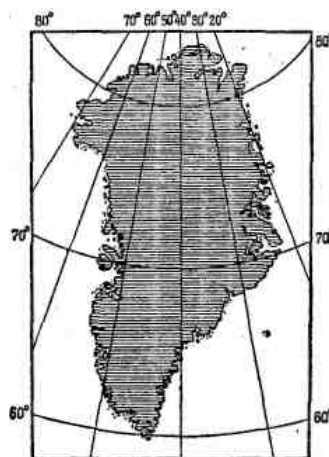


Рис.3 – Карта Гренландии с применением конформного преобразования

Преобразованная таким образом карта была построена около 400 лет назад голландским ученым Меркатором, она получила с тех пор большое распространение в навигации. Ее преимущества перед картой, выполненной в стереографической проекции, состоят в том, что здесь не только меридианы,

но и параллели изображаются прямыми линиями; более того, прямыми линиями изображаются здесь также любые пути на поверхности Земли, вдоль которых стрелка компаса сохраняет неизменное направление (так называемые локсодромии).

Библиографический список:

1. Шахно, К.У. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / К.У. Шахно. – Минск: Высшая школа, 1975.
2. Маркушевич, А.И. Комплексные числа и конформные отображения / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1979.